

Københavns Universitet
Eksamen ved det Naturvidenskabelige Fakultet
Matematik 1GA
6. januar 2003, 14–18

Dette eksamenssæt løber over 4 sider, denne side inklusive. Denne side bedes udfyldt og vedlagt besvarelsen.

- Mit eksamensnummer er _____
- Min klasselærer i efterårssemestret var
 - Simon Sneider
 - Flemming Topsøe
 - Jens Ulrik Lefmann
 - Henning Brandt-Jensen
 - Christian Berg
 - Martin Olsen
 - Sine Rikke Jensen
 - Tommy Bülow
 - Henrik Holm
 - Peter Juul Trosborg
 - Iver Ottosen
 - Ved ikke/Fulgte ikke øvelser/Ønsker ikke at oplyse*
- En midlertidig overgangsordning giver mulighed for godskrivelse af points for eksaminander der har fået godkendt obligatoriske opgaver ved Matematik 1GA i efterårssemestret 2001 eller tidligere.
 - Ja, jeg har fået godkendt opgaver i efterårssemestret _____ og ønsker at benytte mig af overgangsordningen.

Hvis du ikke kan huske hvilket år du fik godkendt opgaver, så sæt kryds alligevel.

Vejledning

Opgavesættet til besvarelse over 4 timer består af fire opgaver benævnt 1, 2, 3 og 4, hver med tre underspørgsmål benævnt (a), (b) og (c). De tolv underspørgsmål vægtes lige ved bedømmelsen. I den samlede vurdering af kurset indgår en pointscore fra afleverede skriftlige opgaver.

Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladte. Besvarelsen kan indskrives med blyant.

Opgave 1

Vi udstyrer \mathbb{R}^4 med det sædvanlige indre produkt og den tilhørende sædvanlige afstands-funktion.

- (a) Udfør Gram-Schmidt ortogonaliseringsproceduren på vektorerne

$$(3, 0, 4, 0), (1, 0, -1, 0), (0, 1, 0, 1).$$

Nedskriv hvert skridt i proceduren.

- (b) Redegør for at resultatet af ortogonaliseringsproceduren i spørgsmål (a) giver en ortonormalbasis for underrummet

$$V = \text{span}((3, 0, 4, 0), (4, 1, 3, 1), (1, 0, -1, 0), (0, 1, 0, 1))$$

af \mathbb{R}^4 .

- ~~(c) Betragt nu vektoren~~

$$\mathbf{w} = (1, 3, 1, 0).$$

~~Find projektionen af \mathbf{w} ned på V . Vis at der gælder~~

$$\|\mathbf{w} - \mathbf{v}\| \geq \frac{3}{\sqrt{2}}$$

~~for enhver vektor $\mathbf{v} \in V$.~~

Opgave 2

Lad $u, v \in \mathbb{C}$ være de to rødder i den komplekse andengradslikning

$$15z^2 - (23 + 14i)z + (3 + 9i) = 0,$$

bestemt ved, at $|u| < |v|$.

(a) Eftersis, at $(13 + 4i)^2 = 153 + 104i$. Find herefter u og v ved hjælp af den sædvanlige formel, jf. [P, Eksempel 2.9].

(b) Vis, at $\sum_{n=0}^{\infty} u^n = v$.

(c) Afgør, om rækken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n^3 \cos(n) u^n}{3^n}$ er konvergent i \mathbb{C} .

Opgave 3

Som sædvanligt betegner \mathbb{P}_2 vektorrummet bestående af andengradspolynomier defineret på hele \mathbb{R} . Betragt afbildningen $T: \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{R}$ defineret ved:

$$T(p) = \det \begin{bmatrix} 1 & p(0) & 4 \\ 2 & p(-1) & 5 \\ 3 & p'(1) & 6 \end{bmatrix}$$

for $p \in \mathbb{P}_2$. Det oplyses, og behøver ikke eftervises, at T er en lineær afbildning.

(a) Bestem $T(1)$, $T(x)$ og $T(x^2)$. Find den matrix som repræsenterer afbildningen T med hensyn til basen $B = \{1, x, x^2\}$ for \mathbb{P}_2 og standardbasen B' for \mathbb{R} .

(b) Vis at T er surjektiv, og udregn dimensionen af kernen $\text{Ker } T$. Bestem endvidere en basis for $\text{Ker } T$.

(c) En anden lineær afbildning $S: \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{P}_2$ har matricen

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

med hensyn til basen B . Bestem matricen for $T \circ S$ med hensyn til B og B' . Beregn $T(S(x^2))$.

Opgave 4

I denne opgave betragtes tre reelle tal r, s, t som holdes fast igennem hele opgaven. Det oplyses at matricen

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & r & 1 \\ -4 & 0 & s & 4 \\ -1 & 1 & t & 7 \end{array} \right]$$

ved en sekvens af rækkeoperationer kan omformes til

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \right]$$

- (a) Anfør tre yderligere rækkeoperationer, der omformer den sidstnævnte matrix til reduceret rækkeechelonform, og opskriv den reducerede matrix.
- (b) Opskriv løsningsmængderne til ligningssystemerne

$$\begin{aligned} -x_1 - x_2 + rx_3 &= 1 \\ -4x_1 + sx_3 &= 4 \\ -x_1 + x_2 + tx_3 &= 7 \end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned} -x_1 - x_2 + rx_3 &= 0 \\ -4x_1 + sx_3 &= 0 \\ -x_1 + x_2 + tx_3 &= 0 \end{aligned}$$

med ubekendte x_1, x_2 og x_3 .

- (c) Vi betragter nu matricen

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & r \\ -4 & 0 & s \\ -1 & 1 & t \end{bmatrix}$$

Bestem $\det(A)$. Vis, at der findes en 3×3 -matrix B så $A + B$ er invertibel.