LinAlg
Skriftlig prøve
27. januar 2005, 9–12

Dette eksamenssæt løber over 5 sider, denne side inklusive. Denne side bedes udfyldt og vedlagt besvarelsen.

- Mit eksamensnummer er __________
- Min klasselærer var:
  - ☐ Henning Brandt-Jensen
  - ☐ David Brink
  - ☐ Esben Bistrup Halvorsen
  - ☐ Mogens Esrom Larsen
  - ☐ Jens Ulrik Lefmann
  - ☐ Mikkel Møller Larsen
  - ☐ Martin Olsen
  - ☐ Dan Rasmussen
  - ☐ Simon Sneider
  - ☐ Flemming Topsøe
  - ☐ Troels Windfeldt Hansen
  - ☐ *Ved ikke/Ønsker ikke at oplyse/Fulgte ikke klasseundervisning.*

Det tilstræbes, men kan ikke garanteres, at din klasselærer retter besvarelsen. Dersom dette ikke ønskes, benyttes den nederste afkrydsningsmulighed.

Vejledning

Sættet stilles til løsning over 3 timer med alle sædvanlige hjælpemidler, bortset fra at man i de første 90 minutter ikke må benytte elektroniske hjælpemidler som lommeregnere eller computere. I de sidste 90 minutter må sådanne hjælpemidler gerne benyttes, men det er ikke tilladt at argumentere ud fra dem i besvarelsen.

Man må gerne argumentere ud fra den vedlagte udskrift af en Maple-session.

De i alt otte underspørgsmål vægtes lige ved bedømmelsen. Opgaver med to underspørgsmål vægtes således dobbelt så højt som opgaver med ét underspørgsmål.

Besvarelsen kan indskrives med blyant.

Ved den samlede bedømmelse indregnes, med vægt 30%, et pointtal som blev givet med udgangspunkt i vurderinger af skriftlige opgavebesvarelser i kursets forløb.

Opgave 1

(a) Udfør rækkeoperationer på

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

der fører matricen på reduceret trappematrixform. De udførte rækkeoperationer ønskes dokumenteret i besvarelsen.

(b) Redegør for at matricen

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

er invertibel, og bestem $\underline{\underline{A}}^{-1}$.

Opgave 2
Man kan med fordel argumentere ud fra maplearket side 5

Bestem samtlige løsninger til differentialligningen

$$u''(t) - 4u'(t) + 4u(t) = 4e^{4t}.$$

Opgave 3
Man kan med fordel argumentere ud fra maplearket side 5

Betragt den lineære afbildning $f : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^3$ givet ved forskriften

$$f\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 & +(2-i)z_2 & +(1+2\,i)z_3 & +(-1-i)z_4 \\ (1+i)z_1 & +z_2 & +3\,i\,z_3 & +2z_4 \\ i\,z_1 & +2z_2 & +(-2+2\,i)z_3 & +(-1+i)z_4 \end{pmatrix}$$

(a) Bestem rangen $\mathrm{rg}(f)$ og dimensionen af kernen $\dim(\ker f)$.

(b) Bestem en basis for billedet $f(\mathbb{C}^4)$ af f og en basis for kernen $\ker f$ for f.

Opgave 4

Redegør for at begge matricerne

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 \\ 19 & 20 & 21 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 \\ 28 & 29 & 30 & 31 & 32 & 33 & 34 & 35 & 36 \\ 37 & 38 & 39 & 40 & 41 & 42 & 43 & 44 & 45 \\ 46 & 47 & 48 & 49 & 50 & 51 & 52 & 53 & 54 \\ 55 & 56 & 57 & 58 & 59 & 60 & 61 & 62 & 63 \\ 64 & 65 & 66 & 67 & 68 & 69 & 70 & 71 & 72 \\ 73 & 74 & 75 & 76 & 77 & 78 & 79 & 80 & 81 \end{pmatrix}$$

har determinant nul.

Opgave 5
Man kan med fordel argumentere ud fra maplearket side 5

Betragt matricen

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 & -3 \\ -1 & 5 & 5 & -3 \\ -1 & 2 & 8 & -3 \\ -1 & 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Bestem for hver egenværdi for $\underline{\underline{A}}$ en basis for det tilhørende egenrum.

(b) Vis at der findes en regulær 4×4 matrix $\underline{\underline{S}}$ og en 4×4 diagonalmatrix $\underline{\underline{D}}$ så $\underline{\underline{S}}$ og $\underline{\underline{D}}$ opfylder

$$\underline{\underline{S A S^{-1}}} = \underline{\underline{D}}.$$

Angiv $\underline{\underline{S}}^{-1}$ og $\underline{\underline{D}}$. *(Det er ikke nødvendigt at bestemme $\underline{\underline{S}}$).*