

Københavns Universitet
Eksamen ved det Naturvidenskabelige Fakultet
Matematik 1GA
6. januar 2003, 14–18

Opgave 1

- (a) Vi kalder de givne vektorer \mathbf{u}_1 , \mathbf{u}_2 og \mathbf{u}_3 . Gram-Schmidt proceduren omfatter udregning af følgende vektorer

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_1 &= \|\mathbf{u}_1\|^{-1} \mathbf{u}_1 = (3/5, 0, 4/5, 0) \\ \mathbf{v}_2 &= \mathbf{u}_2 - \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{e}_1 \rangle \mathbf{e}_1 = (28/25, 0, 21/25, 0) \\ \mathbf{e}_2 &= \|\mathbf{v}_2\|^{-1} \mathbf{v}_2 = (4/5, 0, -3/5, 0) \\ \mathbf{v}_3 &= \mathbf{u}_3 - \langle \mathbf{u}_3, \mathbf{e}_2 \rangle \mathbf{e}_2 - \langle \mathbf{u}_3, \mathbf{e}_1 \rangle \mathbf{e}_1 = \mathbf{u}_3 \\ \mathbf{e}_3 &= \|\mathbf{v}_3\|^{-1} \mathbf{v}_3 = (0, 1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})\end{aligned}$$

og resulterer derfor i ortonormalsystemet

$$(3/5, 0, 4/5, 0), (4/5, 0, -3/5, 0), (0, 1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})$$

- (b) Bemærk at \mathbf{u}_1 , \mathbf{u}_2 og \mathbf{u}_3 er lineært uafhængige, fx fordi

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ved rækkeoperationer kan omformes til

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

og således har fuld rang. Til gengæld er

$$(4, 1, 3, 1) = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3,$$

så \mathbf{u}_1 , \mathbf{u}_2 , \mathbf{u}_3 er altså en basis for V . Ved [M, 4.17] er \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 , \mathbf{e}_3 en ortonormalbasis for V .

- (c) Projektionen af \mathbf{w} på V er givet ved formlen

$$\begin{aligned}\text{proj}_V(\mathbf{w}) &= \langle \mathbf{w}, \mathbf{e}_1 \rangle \mathbf{e}_1 + \langle \mathbf{w}, \mathbf{e}_2 \rangle \mathbf{e}_2 + \langle \mathbf{w}, \mathbf{e}_3 \rangle \mathbf{e}_3 \\ &= 7/5 \mathbf{e}_1 + 1/5 \mathbf{e}_2 + 3/\sqrt{2} \mathbf{e}_3 \\ &= (1, 3/2, 1, 3/2)\end{aligned}$$

Denne vektor er den vektor i V , som kommer nærmest til \mathbf{w} ifølge [M, 4.19]. Nærmere bestemt er $\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|$ mindst mulig, når $\mathbf{v} = \text{proj}_V(\mathbf{w})$. Og da

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\| = \sqrt{\langle \mathbf{w} - \mathbf{v}, \mathbf{w} - \mathbf{v} \rangle} = \sqrt{9/2} = 3/\sqrt{2}$$

har vi vist det ønskede, fordi $\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\| = \|\mathbf{w} - \mathbf{v}\|$

Opgave 2

(a) Vi udregner direkte at

$$(13 + 4i) = 169 + 2 \cdot 13 \cdot 4i + 16i^2 = (169 - 16) + 104i = 153 + 104i$$

Diskriminanten D for andengradsligningen er:

$$D = -(23 + 14i)^2 - 4 \cdot 15 \cdot (3 + 9i) = (333 + 644i) - (180 + 540i) = 153 + 104i.$$

Vores første udregning giver altså, at $D = (13 + 4i)^2$. Følgelig bliver andengradsligningens rødder:

$$z = \frac{(23 + 14i) \pm (13 + 4i)}{2 \cdot 15} = \begin{cases} \frac{3}{5}(2 + i) \\ \frac{1}{3}(1 + i) \end{cases}$$

Idet $|\frac{3}{5}(2 + i)| = \frac{3}{\sqrt{5}} > 1$ og $|\frac{1}{3}(1 + i)| = \frac{\sqrt{2}}{3} < 1$ finder vi:

$$u = \frac{1}{3}(1 + i) \quad \text{og} \quad v = \frac{3}{5}(2 + i).$$

(b) Rækken $\sum_{n=0}^{\infty} u^n$ er en kvotientrække, og da $|u| = \frac{\sqrt{2}}{3} < 1$ giver [P, Sætning 4.32(b)], at den er konvergent med sum:

$$\sum_{n=0}^{\infty} u^n = \frac{1}{1 - u}.$$

En udregning viser, at:

$$\frac{1}{1 - u} = \frac{3}{3 - (1 + i)} = \frac{3}{2 - i} = \frac{3(2 + i)}{(2 - i)(2 + i)} = \frac{3}{5}(2 + i) = v,$$

som ønsket.

(c) Rækken $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^n$ har positive led og konvergerer ifølge kvotientkriteriet, idet jo

$$\frac{(n + 1)^3 \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^{n+1}}{n^3 \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^n} = \frac{2}{\sqrt{5}} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^3 \rightarrow \frac{2}{\sqrt{5}} < 1 \quad \text{for } n \rightarrow \infty.$$

Idet

$$\left| \frac{2^n n^3 \cos(n)v^n}{3^n} \right| \leq \frac{2^n n^3}{3^n} |v|^n = \frac{2^n n^3}{3^n} \left(\frac{3}{\sqrt{5}} \right)^n = n^3 \left(\frac{2}{\sqrt{5}} \right)^n$$

giver sammenligningskriteriet, at rækken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n^3 \cos(n)v^n}{3^n}$ er *absolut* konvergent. Da

absolut konvergens medfører konvergens ([P, Sætning 4.42]), er $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n^3 \cos(n)v^n}{3^n}$ altså konvergent i \mathbb{C} .

Opgave 3

(a) Ved indsættelse fås

p	1	x	x^2
p'	0	1	$2x$
$p(0)$	1	0	0
$p(-1)$	1	-1	1
$p'(1)$	0	1	2

Således kommer vi frem til

$$T(1) = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 6 \end{bmatrix} = -\det \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = -3$$

$$T(x) = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 6 \end{bmatrix} = -\det \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} - \det \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = 9$$

$$T(x^2) = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 6 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} - 2 \det \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = 0$$

ved hver gang at udvikle efter den midterste søjle og benytte at

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = -3 \quad \det \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = -6.$$

Standardbasen for \mathbb{R} har jo kun et element, tallet 1. Så vi har uden videre

$$[T(1)]_{B'} = [-3] \quad [T(x)]_{B'} = [9] \quad [T(x^2)]_{B'} = [0]$$

således at matricen er

$$\begin{bmatrix} -3 & 9 & 0 \end{bmatrix}.$$

(b) Fordi T er lineær, gælder der

$$T(r \cdot 1) = rT(1) = -3r$$

for alle $r \in \mathbb{R}$. Derfor bliver alle elementer $s \in \mathbb{R}$ ramt under T ; vi har jo

$$s = T((-s/3)1)$$

uanset hvad s måtte være, og T er surjektiv.

Nu siger dimensionssætningen at

$$\dim \text{Ker } T = \dim \mathbb{P}^2 - \dim \text{Im } T = 3 - \dim \mathbb{R} = 3 - 1 = 2$$

Vi skal således finde to lineært uafhængige vektorer i $\text{Ker } T$. Da vi har set at $T(x^2) = 0$ er $x^2 \in \text{Ker } T$. Og vi har

$$T(a + bx) = aT(1) + bT(x) = -3a + 9b$$

så ved fx at vælge $a = 3, b = 1$ ser vi at $3 + x \in \text{Ker } T$. Da de to fundne vektorer tydeligvis ikke er proportionale, er

$$3 + x, x^2$$

en basis for $\text{Ker } T$.

(c) Matricen for $T \circ S$ er givet ved matrixproduktet for matricerne for T og S , da der benyttes den samme basis for \mathbb{P}^2 overalt. Vi multiplicerer og får

$$[-3 \quad 9 \quad 0] \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [18 \quad 18 \quad 30].$$

Hermed bliver

$$[T(S(x^2))]_{B'} = [(T \circ S)(x^2)]_{B'} = [18 \quad 18 \quad 30][x^2]_B = [18 \quad 18 \quad 30] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = [30]$$

så

$$T(S(x^2)) = 30.$$

Opgave 4

(a)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \right]$$

omformes ved operationen $R_3 \leftarrow R_3 - R_2$ til

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right]$$

der omformes ved operationen $R_3 \leftarrow \frac{1}{3}R_3$ til

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

som så endelig ved operationen $R_1 \leftarrow R_1 - R_3$ omformes til

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

der ses at være på reduceret rækkeechelonform.

- (b) Vi har i (a) fundet den reducerede rækkeechelonform af den udvidede koefficientmatrix hørende til det første ligningssystem. Så kan løsningsmængden aflæses direkte, den er

$$L = \emptyset$$

på grund af den sidste række i matricen.

Ved at glemme den sidste søjle i matricen fra (a) får vi koefficientmatricen for det homogene system. Ved at parametricere den fri variabel fås

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 + 2y &= 0 \\ x_3 &= y \end{aligned}$$

således at løsningsmængden bliver

$$\{(0, -2y, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$$

- (c) Vi har i (a) færdiggjort omformningen af A til reduceret rækkeechelonform. Det fremgår at rangen af A er $2 < 3$, så A ikke er invertibel. Vi får derfor at $\det A = 0$.

Der er mange muligheder for at vælge B så at $A + B$ bliver invertibel. Fx ved vi jo at I_3 er invertibel, og da

$$I_3 = (A - A) + I_3 = A + (-A + I_3)$$

kan vi sætte $B = -A + I_3 = I_3 - A$.