

### Opgave 1

Vi betragter den binome ligning

$$z^3 = i, \quad z \in \mathbb{C} \quad (1)$$

(a) Eftersis, at de to komplekse tal

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \\ z_2 &= -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \end{aligned}$$

begge er løsninger til den binome ligning (1). Anfør mellemregninger.

Regneregler for komplekse tal giver

$$\begin{aligned} z_1^3 &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) \\ &= \left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + i\frac{\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{1}{2}i\right)^2\right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) \\ &= \left(\frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{4}\right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) \\ &= \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}i - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right) i = i \end{aligned}$$

Man kan også vælge at bruge binomialformlen i stedet, som i

$$\begin{aligned} z_2^3 &= \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 + 3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \frac{1}{2}i + 3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \left(\frac{1}{2}i\right)^2 + \left(\frac{1}{2}i\right)^3 \\ &= -\frac{3\sqrt{3}}{8} + 3\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}i - \frac{3\sqrt{3}}{2} \left(-\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{8}i \\ &= \left(\frac{9}{8} - \frac{1}{8}\right) i = i \end{aligned}$$

Begge metoder viser at de to tal er løsninger til ligningen.

- (b) Redegør for at der er præcis tre løsninger til den binome ligning (1), og bestem modulus og argument for den rod  $z_3$ , der ikke allerede er kendt fra spørgsmål (a).

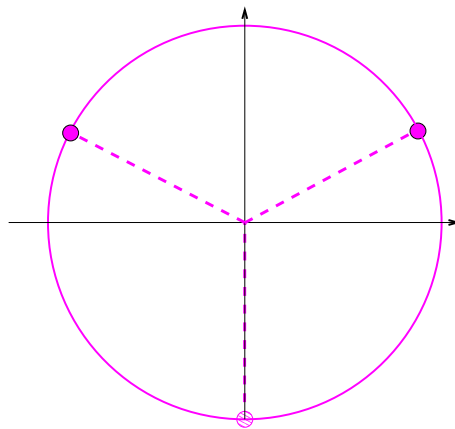
Et resultat i [P] viser at der altid er tre forskellige løsninger til den specielle binome ligning  $z^3 = 1$ . Så er der også tre løsninger til den givne ligning. Vi ved også at enhver løsning har modulus  $\sqrt[3]{|i|} = 1$ , og at de tre argumenter er givet ved

$$\frac{\arg(i)}{3} + \frac{2k\pi}{3}, k = 0, 1, 2.$$

Da  $\frac{\pi}{2}$  er et argument for  $i$  er argumenterne således

$$\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{9\pi}{6}$$

svarende til gradtallene  $30^\circ, 150^\circ, 270^\circ$ . Spørgsmålet er så hvilke to af disse tre argumenter, vi allerede har mødt i (a). Det er nemmest at lave en skitse af situationen, som



og indse at det er de to mindste argumenter, vi er allerede er stødt på, fx ved at se at det er parret af løsninger der har samme imaginærværdi.

Herved har vi altså vist at  $|z_3| = 1$  og  $\arg(z_3) = \frac{3\pi}{2}$ . Man kan så sidenhen let indse at  $z_3 = -i$ , og eventuelt gøre prøve.

## Opgave 2

- (a) Benyt et eller flere konvergenzkriterier for rækker af positive led til at afgøre, hvorvidt rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^3}$$

er konvergent eller divergent.

Kvotientkriteriet kan benyttes. Vi har

$$\begin{aligned} \frac{2^{n+1}/(n+1)^3}{2^n/n^3} &= \frac{2n^3}{(n+1)^3} \\ &= \frac{2n^3}{n^3 + 3n^2 + 3n + 1} \\ &= \frac{2}{1 + 3/n + 3/n^2 + 1/n^3} \end{aligned}$$

der ses at konvergere mod  $2 > 1$  når  $n \rightarrow \infty$ . Derfor udsiger kvotientkriteriet at rækken er divergent.

Man kan også benytte nulkrriteriet.

### Opgave 3

(a) Udfør rækkeoperationer på matricen

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 3 \\ -3 & 6 & 0 & 1 & -7 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & 5 \end{array} \right]$$

indtil matricen kommer på reduceret rækkeechelonform. Det ønskes dokumenteret hvilke rækkeoperationer, der anvendes. Bestem herudfra løsningsmængden til ligningssystemet

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &= 2 \\ 2x_3 + 3x_4 &= 3 \\ -3x_1 + 6x_2 + x_4 &= -7 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 5 \end{aligned}$$

Vi udfører rækkeoperationerne  $R_3 \leftarrow R_3 + 3R_1$ ,  $R_4 \leftarrow R_4 - R_1$  og får

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 3 \end{array} \right]$$

og efter  $R_4 \leftarrow R_4 - R_2$ ,  $R_2 \leftarrow R_2 - 3R_3$ , har vi

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

hvorved vi med  $R_2 \leftarrow \frac{1}{2}R_2$  kommer til

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right],$$

der er på reduceret rækkeechelonform.

Der er uendelig mange løsninger, fordi  $x_2$  er en fri variabel (og fordi der ikke er et initialetal i sidste søjle af den rækkereducerede matrix), så ved at parametrisere den fri variabel med  $x_2 = t$  fås at løsningerne findes ved

$$\begin{aligned} x_1 - 2t &= 2 \\ x_3 &= 3 \\ x_4 &= -1 \end{aligned}$$

eller

$$L = \{(2 + 2t, t, 3, -1) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

Vi benævner nu, for et vilkårligt  $r \in \mathbb{R}$ , løsningsmængden til ligningssystemet

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &= 2 \\ 2x_3 + 3x_4 &= 3 \\ -3x_1 + 6x_2 + x_4 &= -7 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= r \end{aligned}$$

med  $L_r$ . Bemærk at  $L_5$  blev bestemt i spørgsmål (a).

(b) Bevis, at  $L_r = \emptyset$  for samtlige værdier af  $r \neq 5$ .

[Forslag: Udfør rækkeoperationer på en matrix hvor én af indgangene er  $r$ ]

Ligningssystemet er repræsenteret ved

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 3 \\ -3 & 6 & 0 & 1 & -7 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & r \end{array} \right]$$

Som før udfører vi  $R_3 \leftarrow R_3 + 3R_1$ ,  $R_4 \leftarrow R_4 - R_1$ ,  $R_4 \leftarrow R_4 - R_2$  og får

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r - 5 \end{array} \right]$$

Nu ses at ligningen ikke har en løsning når  $r \neq 5$ , for en af de ligninger i det ligningssystem, den ovenstående matrix repræsenterer, er

$$0 = r - 5.$$

### Opgave 4

Vi betragter et vektorrum  $V$  af dimension 3 og en lineær afbildning

$$T : V \longrightarrow V.$$

Vektorrummet  $V$  er udstyret med to forskellige baser, der benævnes henholdsvis  $B$  og  $C$ .

- (a) Det oplyses, at koordinatskiftematrixen for overgang fra basen  $B$  til basen  $C$  er givet ved matrixen

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Bestem koordinatskiftematrixen for overgang fra basen  $C$  til basen  $B$ .

Kald den givne matrix  $P$ . Koordinatskiftematrixen "den modsatte vej" er den inverse  $P^{-1}$ . Denne kan fx findes ved at sætte matrixen

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

på reduceret rækkeechelonform. Man ender med

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/4 & 3/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 3/4 & 1/4 & -1/4 \end{array} \right]$$

således at koordinatskiftematrixen bliver  $3 \times 3$ -blokken mod højre:

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 3/4 & 1/4 \\ 3/4 & 1/4 & -1/4 \end{bmatrix}$$

- (b) Det oplyses, at matrixen for  $T$  med hensyn til basen  $B$  er givet ved

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1/2 & -1 & 1 \\ 3/2 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Bestem matricen for  $T$  med hensyn til basen  $C$  og bemærk at alle dens indgange er enten  $-1$ ,  $0$  eller  $1$ .

Matricen for  $T$  med hensyn til  $C$  er

$$\begin{aligned} P \begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1/2 & -1 & 1 \\ 3/2 & 0 & 2 \end{bmatrix} P^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1/2 & -1 & 1 \\ 3/2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 3/4 & 1/4 \\ 3/4 & 1/4 & 1/4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- (c) Lad  $A$  betegne matricen for  $T$  med hensyn til basen  $C$ , som bestemt i spørgsmål (b). Vis at matrixproduktet  $AA$  er lig med identitetsmatricen, og konkluder dels at  $T$  er en invertibel afbildning, dels at der gælder

$$T^{-1} = T.$$

Det er jo klart at

$$AA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 1^2 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^2 \end{bmatrix} = E_3$$

Det betyder altså specielt at  $A$  har en venstreinvert, nemlig  $A$ , således at  $A$  er invertibel med  $A^{-1} = A$ . Da er  $T$  invertibel med en invers, der er repræsenteret af  $A^{-1} = A$ . Og det er jo netop  $T$ .

## Opgave 5

Vi udstyrer  $\mathbb{R}^4$  med det sædvanlige indre produkt, og betragter

$$S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_2 = 0 \text{ og } x_3 = x_4\}$$

- (a) Redegør for, at  $S$  er et underrum af  $\mathbb{R}^4$ .

Vi skal checke at  $S$  ikke er tom og at  $S$  er lukket under addition og skalarmultiplikation. Det er klart at  $(0, 0, 0, 0) \in S$ . Antag nu at

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$$

$$\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4)$$

er elementer i  $S$  og tag  $\lambda \in \mathbb{R}$ ; vi ønsker at vise at  $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y} \in S$  og  $\mathbf{z}' = \lambda \mathbf{x} \in S$

Men vi har jo

$$\begin{aligned}z_2 &= x_2 + y_2 = 0 + 0 = 0 \\z_3 &= x_3 + y_3 = x_4 + y_4 = z_4\end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned}z'_2 &= \lambda x_2 = 0 \\z'_3 &= \lambda x_3 = \lambda x_4 = z'_4\end{aligned}$$

hvilket viser det ønskede.

Man kan også genkende  $S$  som kernen til matricen

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

(b) Bestem projektionen af vektoren

$$\mathbf{v} = (3, 0, 2, 1)$$

ned på underrummet  $S$ .

[Forslag: Begynd med at bestemme en ortonormalbasis for  $S$ ]

Vi starter med at finde en basis for  $S$ . Hvis ikke man har lyst til at gætte, kan følgende metode benyttes. Det ligningssystem der beskriver  $S$ , er repræsenteret af

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

som allerede er på reduceret rækkeechelonform. Variablene  $x_1$  og  $x_4$  er fri, så ved at parametrisere dem  $x_1 = s, x_4 = t$  får vi

$$\begin{aligned}x_1 &= s \\x_2 &= 0 \\x_3 &= t \\x_4 &= t\end{aligned}$$

så ved at sætte

$$\mathbf{w}_1 = (1, 0, 0, 0) \quad \mathbf{w}_2 = (0, 0, 1, 1)$$

har vi at  $s\mathbf{w}_1 + t\mathbf{w}_2$  gennemløber hele  $S$ , når  $s, t$  gennemløber  $\mathbb{R}$ . Således er  $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$  en basis for  $S$ , da de klart er lineært uafhængige. Gram-Schmidt ortonormalisering på denne basis resulterer i en ortonormalbasis

$$\hat{\mathbf{w}}_1 = (1, 0, 0, 0) \quad \hat{\mathbf{w}}_2 = (0, 0, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$$

og så finder vi projektionen ved

$$\begin{aligned}\text{Proj}_s(\mathbf{v}) &= \langle \mathbf{v}, \hat{\mathbf{w}}_1 \rangle \hat{\mathbf{w}}_1 + \langle \mathbf{v}, \hat{\mathbf{w}}_2 \rangle \hat{\mathbf{w}}_2 \\ &= 3\hat{\mathbf{w}}_1 + \frac{3}{\sqrt{2}}\hat{\mathbf{w}}_2 \\ &= (3, 0, 0, 0) + (0, 0, 1/2, -1/2) \\ &= (3, 0, 3/2, 3/2)\end{aligned}$$