LinAlg
21. januar 2008, 9–12
Besvarelse

Dette eksamenssæt løber over 4 sider, denne side inklusive.

Sættet stilles til løsning over 3 timer med alle sædvanlige hjælpemidler, bortset fra at man i de første 90 minutter ikke må benytte elektroniske hjælpemidler som lommeregnere eller computere. I de sidste 90 minutter må sådanne hjælpemidler gerne benyttes, men det er ikke tilladt at argumentere ud fra dem i besvarelsen.

Man må gerne argumentere ud fra den vedlagte udskrift af en Maple-session.

De i alt ti underspørgsmål vægtes lige ved bedømmelsen.

Besvarelsen kan indskrives med blyant.

Ved den samlede bedømmelse indregnes, med vægt 30%, et pointtal som blev givet med udgangspunkt i vurderinger af skriftlige opgavebesvarelser i kursets forløb.

I løbet af hele eksamen skal eventuelle kommunikationsfaciliteter i lommeregnere og computere være slået fra.

En vejledende besvarelse er indført i lilla tekst.

Opgave 1

Betragt for alle $x \in \mathbb{R}$ matricen

$$A_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{bmatrix}.$$

(a) Find et udtryk for determinanten $\det(A_x)$, og bestem de værdier af x for hvilke A_x er invertibel.

(b) Beregn rangen af A_x for $x = 0$ og $x = 1$.

(a) Matricen A_x reduceres ved rækkeoperationerne $R_3 \to R_3 - R_1$ og $R_4 \to R_4 - R_1$, hvorved vi får følgende matrix med samme determinant som A_x

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & x & x^2-1 & x^3 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Da første søjle har 3 nuller udvikles efter denne og vi får

$$\det(A_x) = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ x & x^2-1 & x^3 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ x & x^2-1 & x^3-3x \end{bmatrix},$$

hvor sidste lighedstegn fremkommer ved søjleoperationen $S_3 \to S_3 - 3S_1$, som ikke ændrer determinanten. Den sidste matrix er en nedre trekantsmatrix og derfor får vi

$$\det(A_x) = 1 \cdot 2 \cdot (x^3 - 3x) = 2x(x^2 - 3).$$

Det ses umiddelbart at determinanten er et polynomium af tredje grad med rødderne $0, \pm\sqrt{3}$, og da en matrix er invertibel netop hvis dens determinant er forskellig fra 0, får vi at A_x er invertibel for $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, \pm\sqrt{3}\}$.

(b) Rangen af en matrix ændres ikke ved rækkeoperationer. Derfor er rangen af A_0 det samme som rangen af (1), hvor vi har indsat $x = 0$, altså matricen

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ved at gange den tredje række med $\frac{1}{2}$ og lægge denne nye tredje række til den fjerde, ser vi at vi får en matrix med 3 ledende 1-taller. Dermed har vi bestemt rangen af A_0 til 3.

Af resultatet i (a) fremgår, at A_1 er invertibel og derfor er dens rang lig med 4.

Opgave 2

Ved løsning af denne opgave kan man med fordel argumentere ud fra resultaterne i det vedlagte Maple-arbejdsark.

Betragt den komplekse 3×3-matrix

$$A = \begin{bmatrix} -2-i & 0 & -2 \\ 1 & -2i & -1 \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

(a) Afgør om A er invertibel, og angiv den inverse matrix A^{-1} hvis den eksisterer.

(b) Løs det lineære ligningssystem

$$\begin{aligned} (-2-i)z_1 - 2z_3 &= 1 \\ z_1 - 2iz_2 - z_3 &= 0 \\ -2z_1 + z_2 - 2z_3 &= i. \end{aligned}$$

(a) Vi aflæser i det vedlagte mapleark at 3×6-matricen $[A|I]$ kan bringes på en reduceret trappematrixform hvor de første tre søjler har ledende ettaller. Så er A invertibel, og A^{-1} kan aflæses i de sidste tre søjler:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -4+i & -2i & 4 \\ 4i & -2 & 1-4i \\ 4+i & -1+2i & -4-2i \end{bmatrix}$$

(b) Vi bemærker at med

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{bmatrix} \qquad \mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$$

så kan ligningssystemet udtrykkes som en matrixligning

$$A\mathbf{z} = \mathbf{w}.$$

Da A er invertibel løses denne matrixligning uden videre ved

$$\mathbf{z} = A^{-1}\mathbf{w} = \begin{bmatrix} -4+i & -2i & 4 \\ 4i & -2 & 1-4i \\ 4+i & -1+2i & -4-2i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-4+i)+4i \\ 4i+(1-4i)i \\ (4+i)+(-4-2i)i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4+5i \\ 4+5i \\ 6-3i \end{bmatrix}$$

så løsningen er

$$z_1 = -4+5i \qquad z_2 = 4+5i \qquad z_3 = 6-3i.$$

Opgave 3

Betragt matricen

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Udregn A's egenværdier.

(b) Gør rede for at der findes en invertibel matrix X sådan at $X^{-1}AX$ er en diagonalmatrix og find et sådant X.

(a) Vi udregner det karakteristiske polynomium

$$p_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & \sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & -\lambda \end{bmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda + \lambda = -\lambda(\lambda^2 - 4).$$

I udregningen har vi brugt formlen for at udregne en 3×3-determinant. Rødderne er klart $\lambda = 0, \lambda = \pm 2$, og de er dermed matricens egenværdier.

(b) Da der er 3 forskellige reelle egenværdier er der en basis af egenvektorer. Alternativt kan henvises til at matricen er symmetrisk. Bruges en basis af egenvektorer som søjlerne i en 3×3 matrix, får vi en invertibel matrix X med den ønskede egenskab.

Vi bestemmer nu egenvektorer til de tre egenværdier. Vi skal finde nulrummene til $A - \lambda I$ for de tre værdier af λ.

$\lambda = \mathbf{0}$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

hvor vi har udført $R_3 \to R_3 - \sqrt{3}R_1$ og ombyttet første og anden række. Det ses at x_3 er en fri variabel. Sættes $x_3 = \sqrt{3}$ finder vi $x_1 = -3$ og $x_2 = 0$, så

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

er en egenvektor til egenværdien 0.

$\lambda = \mathbf{2}$:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & \sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & \sqrt{3} \\ 0 & -3 & 2\sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & -2 \end{bmatrix}.$$

Her har vi udført $R_1 \to R_1 + 2R_2$ og derefter har vi ombyttet første og anden række. Vi ser nu at $-\sqrt{3}R_3 = R_2$ så sidste række kan fjernes ved en rækkeoperation. Divideres anden række med -3 og der derefter udføres $R_1 \to R_1 + 2R_2$, så får vi matricen

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/\sqrt{3} \\ 0 & 1 & -2/\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Igen er x_3 fri og sættes $x_3 = \sqrt{3}$ får vi $x_2 = 2$ og $x_1 = 1$, så

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

er en egenvektor hørende til egenværdien 2.

$\lambda = \mathbf{-2}$: I analogi med det foregående tilfælde foretages reduktion

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & \sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/\sqrt{3} \\ 0 & 1 & 2/\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Igen er x_3 fri, og sættes $x_3 = \sqrt{3}$ får vi $x_2 = -2$ og $x_1 = 1$, så

$$\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

er en egenvektor hørende til egenværdien -2.

Sættes

$$X = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ \sqrt{3} & \sqrt{3} & \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

får vi

$$X^{-1}AX = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Opgave 4

Lad $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ være den lineære afbildning defineret ved

$$L\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 + x_3 \\ x_3 - x_1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \end{bmatrix}.$$

(a) Angiv matricen M for L med hensyn til standardbaserne for $\mathbb{R}^3$ og $\mathbb{R}^4$ og bestem en ortonormal basis for billedrummet (eng: range) $L(\mathbb{R}^3)$.

(b) Angiv en basis for kernen $\ker(L)$.

(a) Vi udregner L's værdier på standardbasen i $\mathbb{R}^3$ og finder ved hjælp af den givne formel:

$$\mathbf{v}_1 = L(\mathbf{e}_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = L(\mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = L(\mathbf{e}_3) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Disse søjler er per definition søjlerne i L's matrix M med hensyn til standardbaserne for $\mathbb{R}^3$ og $\mathbb{R}^4$. Vi har altså

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Billedrummet $L(\mathbb{R}^3)$ er udspændt af M's søjler $\mathbf{v}_j, j = 1, 2, 3$. Her ser vi at $\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3$ så de to søjler $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_3$ udspænder billedrummet. Desuden er $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_3 = 0$ så disse to vektorer er ortogonale. Vi behøver derfor ikke udføre Gram-Schmidt proceduren: Vi skal bare normere de to vektorer, så har vi en ortonormal basis for billedrummet. Da de to vektorer har længde $\sqrt{3}$ har vi, at

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

udgør en ortonormal basis for billedrummet $L(\mathbb{R}^3)$.

(b) Kernen $\ker(L)$ bestemmes som løsningsmængden til ligningssystemet $M\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Fra dimensionssætningen (Rank-Nullity) ved vi, at kernen må have dimension 3-2=1, hvilket også fremgår ved løsning af ligningssystemet.

Matricen M underkastes rækkeoperationer til vi får den reducerede trappematrix:

$$M \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

I første skridt har vi udført $R_3 \to R_3 + R_1$ og $R_4 \to R_4 - R_1$. Den nye matrix har 3 ens rækker og næste skridt består i at erstatte de to sidste med rækker med 2 nulrækker. I sidste skridt udføres $R_1 \to R_1 - R_2$. Det ses at x_3 er en fri variabel. Sættes $x_3 = t$ får vi $x_2 = -t$ og $x_1 = t$, altså

$$\ker(L) = \{ \begin{bmatrix} t \\ -t \\ t \end{bmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \},$$

og en basis kan vælges som

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Opgave 5

Ved løsning af denne opgave kan man med fordel argumentere ud fra resultaterne i det vedlagte Maple-arbejdsark.

Betragt matricen

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

og vektoren

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 9 \\ -1 \\ -11 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

(a) Bestem en ortogonal matrix P og en diagonalmatrix D således at

$$P^T C P = D.$$

(b) Vis, at der for alle $n \in \mathbb{N}$ gælder

$$\mathbf{x} \cdot (C^n \mathbf{x}) = 4 \cdot 8^n.$$

(a) Af det vedlagte mapleark fremgår at C diagonaliseres af matricen X givet ved

$$X = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

i den forstand at $X^{-1}CX = D$ hvor

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

For at diagonalisere C ortogonalt skal vi blot erstatte de af Maple fundne baser for egenrummene for C med ortonormalbaser. Vi ser at der er fire egenrum hver af dimension en, så dette kan opnås ved at fire gange benytte det allerførste trin af Gram-Schmidt ortonormaliseringsproceduren, hvor vektorerne blot skal normaliseres. En ortogonal og diagonaliserende matrix er således

$$P = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

(b) Opgaven løses som i ugeopgave 6.1 ved at diagonalisere C, eller hvad der er det samme, skifte koordinater til en basis af egenvektorer. Man kan indføre et navn for den nye basis som i Note C, eller blot argumentere direkte som herunder.

Da vi ved at $P^T CP = D$ har vi $C = PDP^T$ og dermed

$$C^n = (PDP^T)^n = PD^nP^T = P \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-4)^n \end{bmatrix} P^T.$$

Bemærk også at

$$P^T\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ -1 \\ -11 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-9-11)/\sqrt{2} \\ (9-1-11-1)/2 \\ (-9-1+11-1)/2 \\ (1-1)/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10\sqrt{2} \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

således at

$$\mathbf{x}^T P = (P^T\mathbf{x})^T = \begin{bmatrix} -10\sqrt{2} & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Nu kan vi regne

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \cdot (C^n\mathbf{x}) &= \mathbf{x}^T P \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-4)^n \end{bmatrix} P^T\mathbf{x} \\ &= \begin{bmatrix} -10\sqrt{2} & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-4)^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -10\sqrt{2} \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -10\sqrt{2} & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \cdot 8^n \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= [4 \cdot 8^n], \end{aligned}$$

hvilket viser det ønskede.

```
> with(LinearAlgebra):
```

Opgave 2

```
> A:=<<-2-I,1,-2>|<0,-2*I,1>|<-2,-1,-2>>;
```

$$A := \begin{bmatrix} -2-\mathrm{I} & 0 & -2 \\ 1 & -2\,\mathrm{I} & -1 \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

```
> A2:=<A|IdentityMatrix(3)>;
```

$$A2 := \begin{bmatrix} -2-\mathrm{I} & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2\,\mathrm{I} & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> ReducedRowEchelonForm(A2);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -4+\mathrm{I} & -2\,\mathrm{I} & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 4\,\mathrm{I} & -2 & 1-4\,\mathrm{I} \\ 0 & 0 & 1 & 4+\mathrm{I} & -1+2\,\mathrm{I} & -4-2\,\mathrm{I} \end{bmatrix}$$

Opgave 5

```
> C:=<<3,1,3,1>|<1,1,1,5>|<3,1,3,1>|<1,5,1,1>>;
```

$$C := \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> Eigenvectors(C);
```

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

```
>
```