

LinAlg  
Skriftlig prøve  
21. januar 2008, 9–12

Dette eksamenssæt løber over 4 sider, denne side inklusive.

Sættet stilles til løsning over 3 timer med alle sædvanlige hjælpemidler, bortset fra at man i de første 90 minutter ikke må benytte elektroniske hjælpemidler som lommeregnere eller computere. I de sidste 90 minutter må sådanne hjælpemidler gerne benyttes, men det er ikke tilladt at argumentere ud fra dem i besvarelsen.

Man må gerne argumentere ud fra den vedlagte udskrift af en Maple-session.

De i alt ti underspørgsmål vægtes lige ved bedømmelsen.

Besvarelsen kan indskrives med blyant.

Ved den samlede bedømmelse indregnes, med vægt 30%, et pointtal som blev givet med udgangspunkt i vurderinger af skriftlige opgavebesvarelser i kursets forløb.

I løbet af hele eksamen skal eventuelle kommunikationsfaciliteter i lommeregnere og computere være slået fra.

**Opgave 1**

Betragt for alle  $x \in \mathbb{R}$  matricen

$$A_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{bmatrix}.$$

- (a) Find et udtryk for determinanten  $\det(A_x)$ , og bestem de værdier af  $x$  for hvilke  $A_x$  er invertibel.
- (b) Beregn rangen af  $A_x$  for  $x = 0$  og  $x = 1$ .

**Opgave 2**

Ved løsning af denne opgave kan man med fordel argumentere ud fra resultaterne i det vedlagte Maple-arbejdsark.

Betragt den komplekse  $3 \times 3$ -matrix

$$A = \begin{bmatrix} -2 - i & 0 & -2 \\ 1 & -2i & -1 \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

- (a) Afgør om  $A$  er invertibel, og angiv den inverse matrix  $A^{-1}$  hvis den eksisterer.
- (b) Løs det lineære ligningssystem

$$\begin{aligned} (-2 - i)z_1 - 2z_3 &= 1 \\ z_1 - 2iz_2 - z_3 &= 0 \\ -2z_1 + z_2 - 2z_3 &= i. \end{aligned}$$

**Opgave 3**

Betragt matricen

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \end{bmatrix}.$$

(opgaven fortsætter)

- (a) Udregn  $A$ 's egenverdier.
- (b) Gør rede for at der findes en invertibel matrix  $X$  sådan at  $X^{-1}AX$  er en diagonalmatrix og find et sådant  $X$ .

#### Opgave 4

Lad  $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  være den lineære afbildning defineret ved

$$L \left( \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 + x_3 \\ x_3 - x_1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \end{bmatrix}.$$

- (a) Angiv matricen  $M$  for  $L$  med hensyn til standardbaserne for  $\mathbb{R}^3$  og  $\mathbb{R}^4$  og bestem en ortonormal basis for billedrummet (eng: range)  $L(\mathbb{R}^3)$ .
- (b) Angiv en basis for kernen  $\ker(L)$ .

#### Opgave 5

Ved løsning af denne opgave kan man med fordel argumentere ud fra resultaterne i det vedlagte Maple-arbejdsark.

Betragt matricen

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

og vektoren

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 9 \\ -1 \\ -11 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

- (a) Bestem en ortogonal matrix  $P$  og en diagonalmatrix  $D$  således at

$$P^T C P = D.$$

- (b) Vis, at der for alle  $n \in \mathbb{N}$  gælder

$$\mathbf{x} \cdot (C^n \mathbf{x}) = 4 \cdot 8^n.$$

```
[> with(LinearAlgebra):
```

## ▼ Opgave 2

```
> A:=<<-2-I, 1, -2>|<0, -2*I, 1>|<-2, -1, -2>>;
```

$$A := \begin{bmatrix} -2-I & 0 & -2 \\ 1 & -2I & -1 \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

```
> A2:=<A|IdentityMatrix(3)>;
```

$$A2 := \begin{bmatrix} -2-I & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2I & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> ReducedRowEchelonForm(A2);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -4+I & -2I & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 4I & -2 & 1-4I \\ 0 & 0 & 1 & 4+I & -1+2I & -4-2I \end{bmatrix}$$

## ▼ Opgave 5

```
> C:=<<3, 1, 3, 1>|<1, 1, 1, 5>|<3, 1, 3, 1>|<1, 5, 1, 1>>;
```

$$C := \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> Eigenvectors(C);
```

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

```
[>
```