

# LinAlg 2007-08

## Udvalgte gamle eksamensopgaver

Flere af opgaverne er let redigeret for at tilpasse dem til kurset.

### LinAlg reeksamen 2006, opgave 3

Om en  $3 \times 3$  matrix  $A$  oplyses det, at 2 er en egenværdi med tilhørende egenrum

$$V_2 = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$$

og at 1 er en egenværdi med tilhørende egenrum

$$V_1 = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

- (a) Argumenter for, at der findes en ortonormal basis af egenvektorer for  $A$  og angiv en sådan basis.
- (b) Bestem matricen  $A$ .

### Reeksamen Mat1GB 2001, opgave 4

Man får oplyst, at  $A$  er en  $3 \times 3$  matrix med

$$\text{Egenvektorer:} \quad \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Tilhørende egenværdier:} \quad 0, \quad -3, \quad 2$$

- (a) Eftersis, at de opgivne egenvektorer er ortonormale.
- (b) Bestem matricen  $A$ .

## Mat1GB sommer 2001, opgave 2

Betragt matricen

$$T = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{3}/3 & \sqrt{6}/6 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{3}/3 & -\sqrt{6}/6 \\ 0 & \sqrt{3}/3 & -\sqrt{6}/3 \end{bmatrix}.$$

(a) Vis at  $T$  er en ortogonal matrix.

(b) Betragt

$$A = T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} T^{-1}.$$

Bestem egenværdierne for  $A$  og en basis for hvert af de tilhørende egenrum.

(c) Vis, at der findes en invertibel matrix  $P$  så matricen

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

kan skrives  $B = P^{-1}AP$ .

## 1GB vinter 2004, opgave 3

Betragt  $2 \times 2$  matricen

$$A_{\alpha,\beta} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & -\alpha \end{bmatrix}$$

afhængig af 2 reelle parametre  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

(a) Bestem for hvilke  $\alpha, \beta$  matricen  $A_{\alpha,\beta}$  er en ortogonal matrix.

(b) Bestem, for alle parameterverdier  $\alpha, \beta$ , samtlige egenværdier for matricen  $A_{\alpha,\beta}$ .

### 1GB Sommer 2004, opgave 1

Det oplyses, at  $-1$  er en egenværdi for begge matricerne

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

- Udregn de karakteristiske polynomier for  $A$  og  $B$ . Bestem samtlige egenværdier for  $A$  og  $B$ .
- Redegør for  $A$  er reelt diagonaliserbar, og at  $B$  ikke er reelt diagonaliserbar.
- Bestem en invertibel matrix  $X$  så at  $XAX^{-1}$  er en diagonalmatrix.

### 1GB Vinter 2003, opgave 5

Betragt matricen

$$B = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Eftervis at det karakteristiske polynomium er
$$(3 - \lambda)(2 - \lambda)(1 - \lambda).$$
- Bestem samtlige egenværdier og tilhørende egenvektorer for matricen  $B$ .
- Bestem samtlige egenværdier og tilhørende egenvektorer for matricen  $A = B^4 - 5B^3 + 9B^2 - 7B + 2I$  (*Hjælp*: Du behøver ikke beregne matricen  $A$ ).

### 1GB Reeksamen 2002, opgave 3

Lad  $A$  være en  $2 \times 2$ -matrix med egenværdier 1 og 2 og tilhørende egenvektorer

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

- Bestem matricen  $A$ . *Hjælp*:  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = (ad - bc)^{-1} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ .
- Bestem matricen  $A^{-10}$ .
- Lad  $B$  være en  $2 \times 2$ -matrix med de samme egenvektorer som  $A$ . Vis at matricen  $A + B$  er diagonaliserbar, ligegyldig hvilke egenværdier  $B$  har.

### 1GB Sommer 2002, opgave 3

Betragt  $3 \times 3$  matricen

$$A(a) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 2a & -2 + 2a \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

som afhænger af parameteren  $a \in \mathbb{R}$ .

- (a) Vis, at det karakteristiske polynomium for  $A(a)$  er  $(2 - \lambda)(4 - \lambda)(2a - \lambda)$ .
- (b) Bestem mængden af  $a \in \mathbb{R}$ , for hvilke matricen  $A(a)$  er diagonaliserbar.

### 1GA Sommer 2003, opgave 4

Vi betragter et vektorrum  $V$  af dimension 3 og en lineær afbildning

$$T : V \longrightarrow V.$$

Vektorrummet  $V$  er udstyret med to forskellige baser, der benævnes henholdsvis  $B$  og  $C$ .

- (a) Det oplyses, at koordinatskiftematricen for overgang fra basen  $B$  til basen  $C$  er givet ved matricen

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Bestem koordinatskiftematricen for overgang fra basen  $C$  til basen  $B$ .

- (b) Det oplyses, at matricen for  $T$  med hensyn til basen  $B$  er givet ved

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1/2 & -1 & 1 \\ 3/2 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Bestem matricen for  $T$  med hensyn til basen  $C$  og bemærk at alle dens indgange er enten  $-1$ ,  $0$  eller  $1$ .

- (c) Lad  $A$  betegne matricen for  $T$  med hensyn til basen  $C$ , som bestemt i spørgsmål (b). Vis at matrixproduktet  $AA$  er lig med identitetsmatricen, og konkluder dels at  $T$  er en invertibel afbildning, dels at der gælder

$$T^{-1} = T.$$