# Matematik 1GA
# Skriftlig prøve
# 8. juni 2004, 10–14

Dette eksamenssæt løber over 5 sider, denne side inklusive. Denne side bedes udfyldt og vedlagt besvarelsen.

- Mit eksamensnummer er __________
- Ved den samlede bedømmelse indregnes et pointtal som blev givet med udgangspunkt i vurderinger af skriftlige opgavebesvarelser i løbet af efterårssemestret 2003 eller 2002.

  Sæt ét kryds:

  - ☐ Jeg har afleveret skriftlige opgaver i efterårssemestret 2003 og ønsker at få indregnet point herfra i den samlede bedømmelse.
  - ☐ Jeg har afleveret skriftlige opgaver i efterårssemestret 2002 og ønsker at få indregnet point herfra i den samlede bedømmelse.
  - ☐ Jeg kan ikke påberåbe mig indregnelse af point.

## Vejledning

Opgavesættet til besvarelse over 4 timer består af 5 opgaver, benævnt 1, 2, 3, 4, og 5, hver med et antal underspørgsmål, benævnt $(a)$, $(b)$ og $(c)$. De i alt ti underspørgsmål vægtes lige ved bedømmelsen. Opgaver med tre underspørgsmål vægtes således tre gange højere end opgaver med ét underspørgsmål.

Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladte. Besvarelsen kan indskrives med blyant.

Der lægges ved bedømmelsen vægt på at det af besvarelsen tydeligt fremgår hvordan eksaminanden er kommet frem til de anførte resultater. De bør derfor altid gives med et passende udvalg af mellemregninger, eller — hvis elektroniske værktøjer, herunder avancerede regnemaskiner, er benyttet ved udregningerne — en kort beskrivelse af hvordan det relevante værktøj er blevet brugt.

## ~~Opgave 1~~

~~Vi betragter det komplekse tal~~

$$\cancel{z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} i.}$$

~~(a) Indtegn $z$ på en skitse af den komplekse plan. Beregn modulus og argument for $z$.~~

~~(b) Redegør for, at rækken $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ er konvergent. Eftervis, at der gælder~~

$$\cancel{\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 3z.}$$

## Opgave 2

Betragt vektorerne

$$\mathbf{v} = (1/2, 1/2, 1/2, 1/2) \qquad \mathbf{w} = (1/2, 1/2, -1/2, -1/2)$$

i $\mathbb{R}^4$ udstyret med de sædvanlige vektorrumsoperationer og det sædvanlige indre produkt.

(a) Vis, at ingen af standardbasisvektorerne $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ eller $\mathbf{e}_4$ ligger i span$\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}$. Bestem en basis for $\mathbb{R}^4$ der indeholder både $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$.

(b) Eftervis, at $\|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{w}\| = 1$ samt at $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$. Beregn en ortonormalbasis for $\mathbb{R}^4$ der indeholder både $\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$.

## Opgave 3

Lad $c$ betegne en given heltallig konstant i $\mathbb{Z}$, og betragt ligningssystemet

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_3 + cx_4 &= 0 \\ x_1 + cx_2 + 4x_3 + 5x_4 &= 0 \\ x_1 + 3x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Vi benævner løsningsmængden til dette ligningssystem med $L_c$.

Det oplyses, at uanset hvilken værdi $c$ antager, så kan koefficientmatricen for dette ligningssystem ved lovlige rækkeoperationer omformes til

$$A_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & c & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & c \end{bmatrix}.$$

(a) Find to forskellige værdier for $c$, hvorom det gælder at $A_c$ er på (ikke nødvendigvis reduceret) rækkeechelonform. Opskriv $L_c$ for disse to værdier af $c$.

(b) Beregn dimensionen af $L_c$ for hvert $c \in \{0, 1, 2, 3\}$.

## Opgave 4

Vi betragter matricerne

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

(a) Blandt matricerne $A, B, C, D$ er der netop én som har determinant forskellig fra nul. Find denne matrix ved at argumentere for at de øvrige tre determinanter er nul, og beregn dens determinant.

## Opgave 5

Vi betragter afbildningen $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ givet ved

$$T(x, y, z) = (6x - 3y - 2z, 14x - 7y - 4z, -5x + 3y + 3z) \tag{1}$$

samt vektorsættet

$$C = ((2, 4, -1), (1, 3, -1), (1, 2, -1)).$$

Det oplyses til eventuel brug for besvarelsen at $T$ er lineær, at $C$ er en basis, og at der gælder

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Opskriv matricen for $T$ med hensyn til såvel standardbasen $E$ som basen $C$.

(b) Redegør for at $T$ er invertibel, og opskriv et udtryk for den omvendte afbildning $T^{-1}$ på samme form som i (1).

Vi betragter videre $S : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ givet ved

$$S(x, y, z) = x + y + z.$$

(c) Redegør for at den sammensatte afbildning $S \circ T$ er lineær, og beregn afbildningens rang og nullitet.

nulliteten er dimensionen af kernen