Matematik 1GA
Skriftlig prøve
4. juni 2003, 9–13

Dette eksamenssæt løber over 6 sider, denne side inklusive. Denne side bedes udfyldt og vedlagt besvarelsen.

- Mit eksamensnummer er __________

Ved den samlede bedømmelse indregnes et pointtal som blev givet med udgangspunkt i vurderinger af skriftlige opgavebesvarelser i løbet af efterårssemestret 2002. En midlertidig overgangsordning giver tillige mulighed for godskrivelse af points for eksaminander der har fået godkendt obligatoriske opgaver ("pligtafleveringer") ved et tidligere gennemløb af Matematik 1GA.

- Sæt venligst ét kryds:
  - ☐ Jeg har afleveret skriftlige opgaver i efterårssemestret 2002 og ønsker at få indregnet points herfra i den samlede bedømmelse.
  - ☐ Jeg har gennemført "pligtafleveringer" i et tidligere gennemløb af Matematik 1GA og ønsker at få overført points efter overgangsordningen.
  - ☐ Jeg kan ikke påberåbe mig indregnelse af points efter nogen af ordningerne.

Vejledning

Opgavesættet til besvarelse over 4 timer består af fem opgaver benævnt 1, 2, 3, 4 og 5 hver med et antal underspørgsmål benævnt (a), (b) og (c). De i alt ti underspørgsmål vægtes lige ved bedømmelsen. Opgaver med tre underspørgsmål vægtes således tre gange højere end opgaver med ét underspørgsmål.

Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladte. Besvarelsen kan indskrives med blyant.

~~Opgave 1~~

~~Vi betragter den binome ligning~~

$$z^3 = i, \qquad z \in \mathbb{C} \tag{1}$$

(a) ~~Eftervis, at de to komplekse tal~~

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \\ z_2 &= -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \end{aligned}$$

~~begge er løsninger til den binome ligning (1). Anfør mellemregninger.~~

(b) ~~Redegør for, at der er præcis tre løsninger til den binome ligning (1), og bestem modulus og argument for den rod z_3, der ikke allerede er kendt fra spørgsmål (a).~~

~~Opgave 2~~

(a) ~~Benyt et eller flere konvergenskriterier for rækker af positive led til at afgøre, hvorvidt rækken~~

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^3}$$

~~er konvergent eller divergent.~~

Opgave 3

Vi benævner, for et vilkårligt $r \in \mathbb{R}$, løsningsmængden til ligningssystemet

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &= 2 \\ 2x_3 + 3x_4 &= 3 \\ -3x_1 + 6x_2 + x_4 &= -7 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= r \end{aligned}$$

med L_r.

(a) Udfør rækkeoperationer på matricen

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 3 \\ -3 & 6 & 0 & 1 & -7 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & 5 \end{array}\right]$$

indtil matricen kommer på reduceret rækkeechelonform. Det ønskes dokumenteret hvilke rækkeoperationer, der anvendes. Bestem L_5 herudfra.

(b) Bevis, at $L_r = \emptyset$ for samtlige værdier af $r \neq 5$.

[Forslag: Udfør rækkeoperationer på en matrix hvor én af indgangene er r]

Opgave 4

Vi betragter et vektorrum V af dimension 3 og en lineær afbildning

$$T : V \longrightarrow V.$$

Vektorrummet V er udstyret med to forskellige baser, der benævnes henholdsvis B og C.

(a) Det oplyses, at koordinatskiftematricen for overgang fra basen B til basen C er givet ved matricen

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Bestem koordinatskiftematricen for overgang fra basen C til basen B.

(b) Det oplyses, at matricen for T med hensyn til basen B er givet ved

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1/2 & -1 & 1 \\ 3/2 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Bestem matricen for T med hensyn til basen C og bemærk at alle dens indgange er enten -1, 0 eller 1.

(c) Lad A betegne matricen for T med hensyn til basen C, som bestemt i spørgsmål (b). Vis at matrixproduktet AA er lig med identitetsmatricen, og konkludér dels at T er en invertibel afbildning, dels at der gælder

$$T^{-1} = T.$$

Opgave 5

Vi udstyrer $\mathbb{R}^4$ med det sædvanlige indre produkt, og betragter

$$S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_2 = 0 \text{ og } x_3 = x_4\}$$

(a) Redegør for, at S er et underrum af $\mathbb{R}^4$.

(b) ~~Bestem projektionen af vektoren~~

$$\cancel{\mathbf{v} = (3, 0, 2, 1)}$$

~~ned på underrummet S.~~

~~*[Forslag:*~~ *Begynd med at bestemme en ortonormalbasis for S]*