

LinAlg  
Skriftlig prøve  
17. april 2007, 10–13

Vejledning

Sættet stilles til løsning over 3 timer med alle sædvanlige hjælpemidler, bortset fra at man i de første 90 minutter ikke må benytte elektroniske hjælpemidler som lommeregner eller computere. I de sidste 90 minutter må sådanne hjælpemidler gerne benyttes, men det er ikke tilladt at argumentere ud fra dem i besvarelsen.

Man må gerne argumentere ud fra den vedlagte udskrift af en Maple-session.

De i alt ti underspørgsmål vægtes lige ved bedømmelsen.

Besvarelsen kan indskrives med blyant.

Ved den samlede bedømmelse indregnes, med vægt 30%, et pointtal som blev givet med udgangspunkt i vurderinger af skriftlige opgavebesvarelser i kursets forløb.

**Opgave 1**

Ved løsning af denne opgave kan man med fordel argumentere ud fra resultaterne i det vedlagte Maple-arbejdsark.

Betragt  $5 \times 4$  matricen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 - 2i & 0 \\ 0 & 2 & 2i & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 + i \\ 2 & 2 & 2 & 4 - i \end{bmatrix}$$

(a) Bestem samtlige løsninger til det homogene ligningssystem

$$A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(b) Bestem en basis for søjlerummet for  $A$  (et underrum af  $\mathbb{C}^5$ ). Bestem dimensionen af rækkerummet for  $A$  og angiv, hvilket talrum rækkerummet er et underrum af.

**Opgave 2**

Ved løsning af denne opgave kan man med fordel argumentere ud fra resultaterne i det vedlagte Maple-arbejdsark.

Betragt matricen

$$A = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 9 \\ 2 & 3 & 12 \\ 8 & -3 & 8 \end{bmatrix}.$$

(a) Vis, at netop én af følgende matricer  $B$  og  $C$  er similær med  $A$ , hvor

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b) Find en diagonalmatrix, der er similær med  $C$ .

**Opgave 3**

Betragt vektorerne  $f(x) = e^x$  and  $g(x) = xe^x$  i vektorrummet  $C[0, 1]$  af kontinuerte funktioner på intervallet  $[0, 1]$ . Lad  $V$  være underrummet udspændt af  $f$  og  $g$ . Det oplyses, at  $f$  og  $g$  er lineært uafhængige og derfor udgør en basis for  $V$ .

(a) Redegør for at den matrix der repræsenterer differentiationsafbildningen

$$D : V \rightarrow V, \quad D(u) = u'$$

i basen  $[f, g]$  er

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b) Bestem samtlige egenvektorer for matricen i (a) og de tilhørende funktioner i  $V$  (d.v.s. de funktioner i  $V$  der har egenvektorerne som koordinatvektorer).

**Opgave 4**

Betragt de tre vektorer

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

i  $\mathbb{R}^4$ .

(a) Bestem et ortonormalsystem  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$  med egenskaben

$$\text{span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\} = \text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$$

(b) Redegør for at

$$D = \left\{ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} \right\}$$

udgør en ortonormalbasis for  $\mathbb{R}^4$ , og opskriv koordinatskiftematrixen for skift fra standardbasen  $E$  til basen  $D$ .

**Opgave 5**

Betragt for alle  $r, s \in \mathbb{R}$  matricen

$$A_{r,s} = \begin{bmatrix} 1 & s & 2 & 0 \\ -s & 2 & r^2 & s \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

- (a) Bestem et udtryk for  $\det(A_{r,s})$ .
- (b) Afgør for hvilke  $r$  og  $s$  matricen  $A_{r,s}$  er invertibel.

```
> with(LinearAlgebra):
```

### Opgave 1

```
> A1:=<<1,2,0,1,2>|<1,0,2,1,2>|<1,2-2*I,2*I,1,2>|<1,0,2,-1+I,4-I>>;
```

$$A1 := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2-2I & 0 \\ 0 & 2 & 2I & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1+I \\ 2 & 2 & 2 & 4-I \end{bmatrix} \quad (1)$$

```
> GaussianElimination(A1);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2I & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2+I \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

### Opgave 2

```
> A2:=5^(-1)*<<-1|1|9>,<2|3|12>,<8|-3|8>>;
```

$$A2 := \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{9}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & \frac{12}{5} \\ \frac{8}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{8}{5} \end{bmatrix} \quad (3)$$

```
> CharacteristicPolynomial(A2,lambda);
```

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 \quad (4)$$

```
>
```