LinAlg
Skriftlig prøve
14. april 2008, 10–13

Dette eksamenssæt løber over 4 sider, denne side inklusive.

Sættet stilles til løsning over 3 timer med alle sædvanlige hjælpemidler, bortset fra at man i de første 90 minutter ikke må benytte elektroniske hjælpemidler som lommeregnere eller computere. I de sidste 90 minutter må sådanne hjælpemidler gerne benyttes, men det er ikke tilladt at argumentere ud fra dem i besvarelsen.

Man må gerne argumentere ud fra den vedlagte udskrift af en Maple-session.

De i alt ti underspørgsmål vægtes lige ved bedømmelsen.

Besvarelsen kan indskrives med blyant.

Ved den samlede bedømmelse indregnes, med vægt 30%, et pointtal som blev givet med udgangspunkt i vurderinger af skriftlige opgavebesvarelser i kursets forløb.

I løbet af hele eksamen skal eventuelle kommunikationsfaciliteter i lommeregnere og computere være slået fra.

Opgave 1

Ved løsning af denne opgave kan man med fordel argumentere ud fra resultaterne i det vedlagte Maple-arbejdsark.

(a) Bestem løsningsmængden L_1 for det lineære ligningssystem

$$\begin{aligned} 3x_1 + 9x_2 &= 3 \\ 2x_1 + 6x_2 + x_3 + 2x_4 &= 3 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 &= 2. \end{aligned}$$

(b) Bestem, for alle reelle tal r, løsningsmængden L_r for det lineære ligningsssystem

$$\begin{aligned} 3x_1 + 9x_2 &= 3 \\ 2x_1 + 6x_2 + x_3 + 2x_4 &= r + 2 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 &= r^2 + 1. \end{aligned}$$

Opgave 2

Betragt matricen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 3 \end{bmatrix}.$$

(a) Udregn A's egenværdier og bestem de tilhørende egenrum.

(b) Afgør om der findes en invertibel matrix X sådan at $X^{-1}AX$ er en diagonalmatrix.

Opgave 3

Betragt matricerne

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Bestem $\det(C)$ og $\det(D)$ med angivelse af detaljerede mellemregninger.

(b) Redegør for at $CD \neq DC$, men at $\det(CD) = \det(DC)$.

Opgave 4

I vektorrummet $C(\mathbb{R})$ af kontinuerte funktioner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ betragtes underrummet V udspændt af de fire funktioner $1, x, e^x, xe^x$, altså

$$V = \text{span}\{1, x, e^x, xe^x\}.$$

Det oplyses at de fire funktioner er lineært uafhængige og dermed er $\{1, x, e^x, xe^x\}$ en ordnet basis for V.

Lad $L : V \to V$ være den lineære afbildning givet ved $L(f) = f' + 3f$.

(a) Bestem matricen A for L med hensyn til den angivne basis.

(b) Bestem rangen af matricen A og kernen for L.

Opgave 5

Ved løsning af denne opgave kan man med fordel argumentere ud fra resultaterne i det vedlagte Maple-arbejdsark.

Betragt de fire vektorer

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{x}_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

i $\mathbb{R}^4$ og lad $U = \text{span}\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4\}$.

(a) Vis at $\dim U = 3$ og bestem en ortonormal basis $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ for U.

(b) Gør rede for at $[1, -1, -1, -3]^T$ er ortogonal på alle vektorer i U, og angiv en ortogonal matrix S, hvis 3 første søjler er $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$.

```
> with(LinearAlgebra):
```

Opgave 1

```
> C<<3|9|0|0|3>,<2|6|1|2|2+r>,<1|3|1|2|1+r^2>>;
```

$$C := \begin{bmatrix} 3 & 9 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 6 & 1 & 2 & 2+r \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 1+r^2 \end{bmatrix}$$

```
> GaussianElimination(%);
```

$$\begin{bmatrix} 3 & 9 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r^2-r \end{bmatrix}$$

```
>
```

Opgave 5

```
> A:=<<0,1,-1,0>|<1,1,0,0>|<0,-1,-2,1>|<2,0,-1,1>>;
```

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> ReducedRowEchelonForm(A);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
>
```