

# LinAlg

## Skriftlig 3 timers reeksamen 18. april 2005

Sættet stilles til løsning over 3 timer med alle sædvanlige hjælpemidler, bortset fra at man i de første 90 minutter ikke må benytte elektroniske hjælpemidler som lommeregnere eller computere. I de sidste 90 minutter må sådanne hjælpemidler gerne benyttes, men det er ikke tilladt at argumentere ud fra dem i besvarelsen.

Man må gerne argumentere ud fra den vedlagte udskrift af en Maple-session. De i alt otte underspørgsmål vægtes lige ved bedømmelsen. Opgaver med to underspørgsmål vægtes således dobbelt så højt som opgaver med ét underspørgsmål.

Besvarelsen kan indskrives med blyant.

Ved den samlede bedømmelse indregnes, med vægt 30%, et pointtal som blev givet med udgangspunkt i vurderinger af skriftlige opgavebesvarelser i kursets forløb.

### Opgave 1

Udregn determinanten (alle mellemregninger skal fremgå)

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ i & 1+2i & 2 & 0 \\ 1 & 0 & i & 1 \\ 2-i & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

### Opgave 2

Bestem løsningen  $u(t)$  for  $t > 0$  til begyndelsesværdiproblemet

$$u'(t) + t^{-1}u(t) = t, \quad u(1) = 1, \quad t > 0.$$

### Opgave 3

Man kan med fordel argumentere ud fra maplearket side 4–5

Betragt den lineære afbildning  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  givet ved

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & +2x_2 & -x_3 & +7x_4 \\ x_1 & +3x_2 & -2x_3 & -3x_4 \\ 2x_1 & +6x_2 & -3x_3 & +2x_4 \\ -x_1 & -2x_2 & +2x_3 & +x_4 \end{pmatrix}$$

- (a) Bestem rangen  $\text{rg}(f)$  og dimensionen af kernen  $\dim(\ker(f))$ .
- (b) Angiv en basis for kernen og en ligning som er nødvendig og tilstrækkelig

for at vektoren  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$  tilhører billedet  $f(\mathbb{R}^4)$  af  $f$ .

### Opgave 4

En kvadratisk  $n \times n$  matrix  $\underline{\underline{A}}$  har egenskaben  $\underline{\underline{A}}^2 = \underline{\underline{A}}$ . Lad  $\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}}$  ( $\underline{\underline{E}}$  er en  $n \times n$  enhedsmatrix)

- (a) Vis at  $\underline{\underline{B}}\underline{\underline{A}} = 0$  og  $\underline{\underline{B}}^2 = \underline{\underline{B}}$ .
- (b) Argumenter for at hvis  $\underline{\underline{B}}$  er invertibel da er  $\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{E}}$ . (Man kan med fordel benytte resultatet i delspørgsmål (a) også selvom man ikke har besvaret dette.)

### Opgave 5

Man kan med fordel argumentere ud fra maplearket side 4–5

Betragt  $5 \times 5$  matricen

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} -7 & -2/3 & -3 & -2 & -2/3 \\ 10 & 11/3 & 3 & 2 & 2/3 \\ 18 & 4/3 & 8 & 4 & 4/3 \\ 14 & 2/3 & 5 & 5 & 2/3 \\ 1 & -2/3 & 1 & 0 & 4/3 \end{pmatrix}$$

- (a) Bestem samtlige egenverdier for  $\underline{\underline{A}}$  og en basis for hvert af de tilhørende egenrum.
- (b) Bestem determinanten  $\det(\underline{\underline{A}})$ .

```
> with(LinearAlgebra):
```

### Opgave 3

```
> C:=<<1,1,2,-1>|<2,3,6,-2>|<-1,-2,-3,2>|<7,-3,2,1>|<x,y,z,w>>;
```

$$C := \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 7 & x \\ 1 & 3 & -2 & -3 & y \\ 2 & 6 & -3 & 2 & z \\ -1 & -2 & 2 & 1 & w \end{bmatrix}$$

```
> GaussianElimination(C);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 7 & x \\ 0 & 1 & -1 & -10 & y-x \\ 0 & 0 & 1 & 8 & z-2y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & w+x-z+2y \end{bmatrix}$$

### Opgave 5

```
> D1:=DiagonalMatrix([1,3,2,2,3]);S1:=<<1,1,1,2,3>|<1,1,0,0,-2>|<-1,0,-1,1,2>|<1,0,2,0,1>|<2,0,-1,0,0>>;
```

$$D1 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$S1 := \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> S1^(-1);
```

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-11}{3} & \frac{2}{3} & \frac{13}{3} & \frac{-5}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{14}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{-13}{3} & \frac{5}{3} \\ \frac{-2}{3} & \frac{22}{3} & \frac{-4}{3} & \frac{-23}{3} & \frac{10}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{17}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{-19}{3} & \frac{8}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

> A:=S1^(-1) .D1 .S1;

$$A := \begin{bmatrix} -7 & \frac{-2}{3} & -3 & -2 & \frac{-2}{3} \\ 10 & \frac{11}{3} & 3 & 2 & \frac{2}{3} \\ 18 & \frac{4}{3} & 8 & 4 & \frac{4}{3} \\ 14 & \frac{2}{3} & 5 & 5 & \frac{2}{3} \\ 1 & \frac{-2}{3} & 1 & 0 & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$