LinAlg prøveeksamen 2007

Sættet stilles til løsning over 3 timer med alle sædvanlige hjælpemidler, bortset fra at man i de første 90 minutter ikke må benytte elektroniske hjælpemidler som lommeregnere eller computere. I de sidste 90 minutter må sådanne hjælpemidler gerne benyttes, men det er ikke tilladt at argumentere ud fra dem i besvarelsen.

Man må gerne argumentere ud fra den vedlagte udskrift af en Maple-session.

De i alt otte underspørgsmål vægtes lige ved bedømmelsen. Opgaver med to underspørgsmål vægtes således dobbelt så højt som opgaver med ét underspørgsmål.

Besvarelsen kan indskrives med blyant til eksamen.

En vejledende besvarelse er indført i lilla tekst.

Opgave 1

Vi betragter matricerne

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & -1 & 3 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Blandt matricerne A, B, C, D er der netop én som har determinant forskellig fra nul. Find denne matrix ved at argumentere for at de øvrige tre determinanter er nul, og beregn dens determinant.

Ombytning af række 2 og 4 i A viser at $\det(A) = -\det(A)$, så $\det(A) = 0$. Da C er på echelonform ses at $\det(C) = 1 \cdot 4 \cdot 0 \cdot 3 \cdot 4 = 0$. Og ved multiplikation af række 3 med -1 har vi $\det(D) = -\det(D)$.

Således må det være B der har determinant ulig nul. B kan bringes på echelonform med tre rækkeoperationer af formen III. Disse ændrer ikke determinanten, så vi har

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot (-3) = -36$$

Opgave 2

Ved løsning af denne opgave kan man med fordel argumentere ud fra resultaterne i det vedlagte Maple-arbejdsark.

(a) Argumenter for at matricen

$$A = \begin{pmatrix} i & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1+i & 0 & 0 \\ 1 & -2\,i & -1 & 0 \\ 0 & 1 & i & 1-i \end{pmatrix}$$

er invertibel og find dens inverse A^{-1}

Ifølge det vedlagte mapleark vil Gauss elimination på matricen $(A|I)$ give

$$\begin{pmatrix} i & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1+i & i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-i & -1+2\,i & -2 & i & 1 \end{pmatrix}.$$

Specielt ses det at 4×4 matricen A ved rækkeoperationer kan omformes til en 4 trins echelonmatrix. Altså er A invertibel. For at finde A^{-1} finder vi den reducerede trappematrix for $(A|I)$.

En rækkeoperation af type III giver

$$\begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 & 1+i & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1+i & i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-i & -1+2\,i & -2 & i & 1 \end{pmatrix}$$

For at finde den reducerede trappematrix skal vi skaffe ettaller i diagonalen med operationer af type II:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1+i}{i} & \frac{-1}{i} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1-i & -i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-1+2\,i}{1-i} & \frac{-2}{1-i} & \frac{i}{1-i} & \frac{1}{1-i} \end{pmatrix}$$

Vi udregner

$$\frac{1+i}{i} = \frac{(1+i)(-i)}{i(-i)} = \frac{1-i}{1} = 1-i, \quad \frac{-1}{i} = i$$

$$\frac{-1+2\,i}{1-i}=\frac{(-1+2\,i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{-3+i}{2},\quad \frac{-2}{1-i}=\frac{-2(1+i)}{(1-i)(1+i)}=-1-i$$
$$\frac{i}{1-i}=\frac{i(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{-1+i}{2},\quad \frac{1}{1-i}=\frac{1+i}{2}.$$

Den reducerede trappematrix er derfor

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1-i & i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1-i & -i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3/2+i/2 & -1-i & -1/2+i/2 & 1/2+i/2 \end{pmatrix}.$$

Vi aflæser at

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 1-i & i & 0 & 0 \\ -i & 1 & 0 & 0 \\ -1-i & -i & -1 & 0 \\ -3/2+i/2 & -1-i & -1/2+i/2 & 1/2+i/2 \end{pmatrix}.$$

(b) Løs ligningssystemet

$$\begin{pmatrix} i & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1+i & 0 & 0 \\ 1 & -2\,i & -1 & 0 \\ 0 & 1 & i & 1-i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 2 \\ 1+2i \end{pmatrix}$$

Vi har

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 2 \\ 1+2i \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \\ -1-i \\ -2+i \end{pmatrix}$$

Opgave 3

(a) Bestem, for alle værdier af r, rangen af matricen

$$A_r=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & r & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

To rækkeoperationer af type III fører A_r til

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & r-1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Når $r = 1$ har vi

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

hvis reducerede trappematrixform er

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

som har to trin og dermed rang 2.

Når $r \neq 1$ kan vi reducere til

$$A_r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/(r-1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

som har tre trin og rang 3.

Bemærk at Maple giver et ukorrekt svar på denne opgave.

(b) Find $\dim \ker(L)$, hvor $L : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ er givet ved

$$L\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_3 + x_4 - x_5 \\ x_1 + 2x_3 + 2x_4 \\ 2x_1 + 4x_3 + 2x_4 \end{bmatrix}$$

Afbildningen ses at have matrix A_2 med hensyn til standardbaserne på $\mathbb{R}^5$ og $\mathbb{R}^3$. Således er rangen i (a) bestemt til 3. Nulliteten af A_2 er ved sætningen SL side 164 $5 - 3 = 2$, og nulliteten er jo netop $\dim \ker(L)$.

Opgave 4

(a) Redegør for at afbildningen

$$F : P_4 \longrightarrow P_7$$

(jf. SL side 120) givet ved $F(p(x)) = (p(x))^2$, ikke er en lineær afbildning.

Antag at F er lineær. Vi kan bestemme en matrix for den med hensyn til de naturlige baser $1, x, x^2, x^3$ og $1, x, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6$ for henholdsvis $P_4(\mathbb{R})$ og $P_7(\mathbb{R})$, ved at skrive $F(1)$, $F(x)$, $F(x^2)$ og $F(x^3)$ op i basen for $P_7(\mathbb{R})$. Vi får

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Men den lineære afbildning givet ved denne matrix sender jo

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$$

i

$$a_0 + a_1x^2 + a_2x^4 + a_3x^6$$

og dette er ikke F. Derfor kan F ikke være lineær.

Hvis man får øje på problemet uden en analyse af denne type er det fuldt tilstrækkeligt at give et eksempel, fx at $F(2x) \neq 2F(x)$.

Opgave 5

Ved løsning af denne opgave kan man med fordel argumentere ud fra resultaterne i det vedlagte Maple-arbejdsark.

(a) Bestem for begge matricer

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ -3 & 7 & 6 \\ 3 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

baser for alle egenrummene.

Ud fra det vedhæftede mapleark ser vi, at begge matricer har egenværdierne -2 og 4.

Vi bestemmer først basen for egenrummet for matricen A hørende til egenværdien -2

$$A + 2I = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

som ved Gausselimination transformeres til trappematricen

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 6 & -12 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En basis for egenrummet aflæses heraf til at være givet ved vektoren

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Egenrummet for A hørende til egenværdien 4:

$$A - 4I = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Samtlige vektorer i egenrummet kan derfor skrives som

$$\begin{pmatrix} 2s + t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

En basis for egenrummet er således givet ved

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Egenrummet for B hørende til egenværdien -2:

$$B + 2I = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 6 \\ -3 & 9 & 6 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Basen er givet ved

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Egenrummet for B hørende til egenværdien 4:

$$B - 4I = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 6 \\ -3 & 3 & 6 \\ 3 & -3 & -6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Basen er

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(b) For den ene af matricerne i (a) kan man finde en ortonormal basis af egenvektorer. Angiv hvilken matrix og en tilhørende ortonormal basis af egenvektorer.

Matricen A er symmetrisk og har derfor en ortonormal basis af egenvektorer. Vi finder en ortonormal basis af egenvektorer ved først at udføre Gram-Schmidts ortonormaliseringsprocedure på basisvektorerne i egenrummet hørede til egenværdien 4. Vi starter med

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

og får

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{x}_1 \qquad \mathbf{p}_1 = \mathbf{x}_1 \qquad \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Egenvektoren til egenværdien -2 skal blot normaliseres, så har vi følgende ortonormale basis af egenvektorer

$$\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

```
> restart;with(LinearAlgebra):
```

Opgave 2

```
> A:=<<I | 1 | 0 | 0>, <-1 | 1+I | 0 | 0>, <1 | -2*I | -1 | 0>, <0 | 1
  | I | 1-I>>;
```

$$A := \begin{bmatrix} I & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1+I & 0 & 0 \\ 1 & -2\,I & -1 & 0 \\ 0 & 1 & I & 1-I \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

```
> <A|IdentityMatrix(4)>;
```

$$\begin{bmatrix} I & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1+I & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2\,I & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & I & 1-I & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

```
> GaussianElimination(%);
```

$$\begin{bmatrix} I & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -I & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1+I & I & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-I & -1+2\,I & -2 & I & 1 \end{bmatrix} \tag{1.3}$$

Opgave 5

```
> A:=<<3,2,1>|<2,0,-2>|<1,-2,3>>; Eigenvalues(A);
```

$$A := \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

```
> B:=<<1,-3,3>|<3,7,-3>|<6,6,-2>>; Eigenvalues(B);
```

$$B := \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ -3 & 7 & 6 \\ 3 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

```
>
```