LinAlg prøveeksamen 2007

Sættet stilles til løsning over 3 timer med alle sædvanlige hjælpemidler, bortset fra at man i de første 90 minutter ikke må benytte elektroniske hjælpemidler som lommeregnere eller computere. I de sidste 90 minutter må sådanne hjælpemidler gerne benyttes, men det er ikke tilladt at argumentere ud fra dem i besvarelsen.

Man må gerne argumentere ud fra den vedlagte udskrift af en Maple-session.

De i alt otte underspørgsmål vægtes lige ved bedømmelsen. Opgaver med to underspørgsmål vægtes således dobbelt så højt som opgaver med ét underspørgsmål.

Besvarelsen kan indskrives med blyant til eksamen.

Opgave 1

Vi betragter matricerne

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & -1 & 3 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Blandt matricerne A, B, C, D er der netop én som har determinant forskellig fra nul. Find denne matrix ved at argumentere for at de øvrige tre determinanter er nul, og beregn dens determinant.

Opgave 2

Ved løsning af denne opgave kan man med fordel argumentere ud fra resultaterne i det vedlagte Maple-arbejdsark.

(a) Argumenter for at matricen

$$A = \begin{pmatrix} i & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1+i & 0 & 0 \\ 1 & -2\,i & -1 & 0 \\ 0 & 1 & i & 1-i \end{pmatrix}$$

er invertibel og find dens inverse A^{-1}

(b) Løs ligningssystemet

$$\begin{pmatrix} i & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1+i & 0 & 0 \\ 1 & -2\,i & -1 & 0 \\ 0 & 1 & i & 1-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 2 \\ 1+2i \end{pmatrix}$$

Opgave 3

(a) Bestem, for alle værdier af r, rangen af matricen

$$A_r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & r & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Find $\dim\ker(L)$, hvor $L : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ er givet ved

$$L\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_3 + x_4 - x_5 \\ x_1 + 2x_3 + 2x_4 \\ 2x_1 + 4x_3 + 2x_4 \end{bmatrix}$$

Opgave 4

(a) Redegør for at afbildningen

$$F : P_4 \longrightarrow P_7$$

(jf. SL side 120) givet ved $F(p(x)) = (p(x))^2$, <u>ikke</u> er en lineær afbildning.

Opgave 5

Ved løsning af denne opgave kan man med fordel argumentere ud fra resultaterne i det vedlagte Maple-arbejdsark.

(a) Bestem for begge matricer

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ -3 & 7 & 6 \\ 3 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

baser for alle egenrummene.

(b) For den ene af matricerne i (a) kan man finde en ortonormal basis af egenvektorer. Angiv hvilken matrix og en tilhørende ortonormal basis af egenvektorer.

```
> restart;with(LinearAlgebra):
```

Opgave 2

```
> A:=<<I | 1 | 0 | 0>, <-1 | 1+I | 0 | 0>, <1 | -2*I | -1 | 0>, <0 | 1
  | I | 1-I>>;
```

$$A := \begin{bmatrix} I & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1+I & 0 & 0 \\ 1 & -2\,I & -1 & 0 \\ 0 & 1 & I & 1-I \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

```
> <A|IdentityMatrix(4)>;
```

$$\begin{bmatrix} I & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1+I & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2\,I & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & I & 1-I & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

```
> GaussianElimination(%);
```

$$\begin{bmatrix} I & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -I & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1+I & I & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-I & -1+2\,I & -2 & I & 1 \end{bmatrix} \tag{1.3}$$

Opgave 5

```
> A:=<<3,2,1>|<2,0,-2>|<1,-2,3>>; Eigenvalues(A);
```

$$A := \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

```
> B:=<<1,-3,3>|<3,7,-3>|<6,6,-2>>; Eigenvalues(B);
```

$$B := \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ -3 & 7 & 6 \\ 3 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

```
>
```