LinAlg prøveeksamen

Sættet stilles til løsning over 3 timer med alle sædvanlige hjælpemidler, bortset fra at man i de første 90 minutter ikke må benytte elektroniske hjælpemidler som lommeregnere eller computere. I de sidste 90 minutter må sådanne hjælpemidler gerne benyttes, men det er ikke tilladt at argumentere ud fra dem i besvarelsen.

Man må gerne argumentere ud fra den vedlagte udskrift af en Maple-session.

De i alt otte underspørgsmål vægtes lige ved bedømmelsen. Opgaver med to underspørgsmål vægtes således dobbelt så højt som opgaver med ét underspørgsmål.

Besvarelsen kan indskrives med blyant til eksamen.

Omfanget denne prøveeksamen modsvarer omfanget til selve eksamen, men pensum er begrænset til ugerne 1–5. Ved selve eksamen stilles opgaver i hele kursets pensum.

Opgave 1

Vi betragter matricerne

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & -1 & 3 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad \underline{\underline{D}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Blandt matricerne $\underline{\underline{A}}, \underline{\underline{B}}, \underline{\underline{C}}, \underline{\underline{D}}$ er der netop én som har determinant forskellig fra nul. Find denne matrix ved at argumentere for at de øvrige tre determinanter er nul, og beregn dens determinant.

Opgave 2

Ved løsning af denne opgave kan man med fordel argumentere ud fra resultaterne i det vedlagte Maple-arbejdsark.

(a) Argumenter for at matricen

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} i & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1+i & 0 & 0 \\ 1 & -2i & -1 & 0 \\ 0 & 1 & i & 1-i \end{pmatrix}$$

er invertibel og find dens inverse $\underline{\underline{A}}^{-1}$

(b) Løs ligningssystemet

$$\begin{pmatrix} i & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1+i & 0 & 0 \\ 1 & -2i & -1 & 0 \\ 0 & 1 & i & 1-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 2 \\ 1+2i \end{pmatrix}$$

Opgave 3

(a) Bestem, for alle værdier af r, rangen af matricen

$$\underline{\underline{A_r}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & r & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Find $\dim \ker(f)$, hvor $f : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ er givet ved

$$f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_3 + x_4 - x_5 \\ x_1 + 2x_3 + 2x_4 \\ 2x_1 + 4x_3 + 2x_4 \end{bmatrix}$$

Opgave 4

Ved løsning af denne opgave kan man med fordel argumentere ud fra resultaterne i det vedlagte Maple-arbejdsark.

(a) Bestem den funktion $u(t)$ som løser

$$u''(t) - 4u'(t) + 8\,u(t) = 8\,t^2 + 1, \qquad u'(0) = 1,\; u(0) = 0.$$

Opgave 5

(a) Redegør for at afbildningen

$$F : \mathrm{Pol}_3(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{Pol}_6(\mathbb{R})$$

givet ved $F(p(x)) = (p(x))^2$, <u>ikke</u> er en lineær afbildning.

Opgave 6

(a) Bestem samtlige løsninger $u(t)$ til differentialligningen

$$u'(t) - u(t)/t = t^3, \quad t > 0$$

```
> restart;
```

```
> with(LinearAlgebra):
```

Opgave 2

```
> A:=<<I | 1 | 0 | 0>, <-1 | 1+I | 0 | 0>, <1 | -2*I | -1 | 0>, <0 | 1 | I | 1-I>>;
```

$$A := \begin{bmatrix} I & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1+I & 0 & 0 \\ 1 & -2\,I & -1 & 0 \\ 0 & 1 & I & 1-I \end{bmatrix}$$

```
> <A|IdentityMatrix(4)>;
```

$$\begin{bmatrix} I & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1+I & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2\,I & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & I & 1-I & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> GaussianElimination(%);
```

$$\begin{bmatrix} I & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -I & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1+I & I & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-I & -1+2\,I & -2 & I & 1 \end{bmatrix}$$

Opgave 4

```
> DL:=diff(u(t),t$2)-4*diff(u(t),t)+8*u(t)=8*t^2+1;
```

$$DL := \left(\frac{d^2}{dt^2}\,u(t)\right) - 4\left(\frac{d}{dt}\,u(t)\right) + 8\,u(t) = 8\,t^2 + 1$$

```
> dsolve({DL,u(0)=3/8,D(u)(0)=1});
```

$$u(t) = \frac{3}{8} + t + t^2$$

```
>
```