LinAlg
Skriftlig prøve
Vejledende besvarelse
23. januar 2006, 14–17

Dette eksamenssæt løber over 6 sider, denne side inklusive. Denne side bedes udfyldt og vedlagt besvarelsen.

- Mit eksamensnummer er __________
- Min klasselærer var:
  - ☐ Henning Brandt-Jensen
  - ☐ Michael Wermund Bruun
  - ☐ David Kyed
  - ☐ Jens Ulrik Lefmann
  - ☐ Lars Lund-Hansen
  - ☐ Martin Olsen
  - ☐ Jørn Børling Olsson
  - ☐ Dan Rasmussen
  - ☐ Jonas B. Rasmussen
  - ☐ Simon Sneider
  - ☐ *Ved ikke/Ønsker ikke at oplyse/Fulgte ikke klasseundervisning.*

Det tilstræbes, men kan ikke garanteres, at din klasselærer retter besvarelsen. Dersom dette ikke ønskes, benyttes den nederste afkrydsningsmulighed.

Vejledning

Sættet stilles til løsning over 3 timer med alle sædvanlige hjælpemidler, bortset fra at man i de første 90 minutter ikke må benytte elektroniske hjælpemidler som lommeregnere eller computere. I de sidste 90 minutter må sådanne hjælpemidler gerne benyttes, men det er ikke tilladt at argumentere ud fra dem i besvarelsen.

Man må gerne argumentere ud fra den vedlagte udskrift af en Maple-session.

De i alt ni underspørgsmål vægtes lige ved bedømmelsen. Opgaver med to underspørgsmål vægtes således dobbelt så højt som opgaver med ét underspørgsmål.

Besvarelsen kan indskrives med blyant.

Ved den samlede bedømmelse indregnes, med vægt 30%, et pointtal som blev givet med udgangspunkt i vurderinger af skriftlige opgavebesvarelser i kursets forløb.

En vejledende besvarelse er indført i lilla tekst.

Opgave 1

(a) Bestem samtlige løsninger til det komplekse lineære ligningssystem

$$\begin{aligned} iz_1 - z_2 &= -1 \\ z_1 + iz_2 + 2z_3 - 2iz_4 &= 4+i \\ z_1 + iz_2 + z_3 - iz_4 &= 2+i \end{aligned}$$

Systemets koefficientmatrix er jo

$$\left[\begin{array}{cccc|c} i & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & i & 2 & -2i & 4+i \\ 1 & i & 1 & -i & 2+i \end{array}\right].$$

Operationerne $M_1(1/i) = M_1(-i)$ og $S_{32}(-1)$ fører matricen i

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & i & 0 & 0 & i \\ 1 & i & 2 & -2i & 4+i \\ 0 & 0 & -1 & i & -2 \end{array}\right]$$

og efter $S_{12}(-1)$ og $M_3(-1)$ har vi videre

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & i & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 2 & -2i & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -i & 2 \end{array}\right].$$

Vi udfører nu $M_2(1/2)$ og får

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & i & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 1 & -i & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -i & 2 \end{array}\right]$$

der efter $S_{32}(-1)$ er på trekantsformen

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & i & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 1 & -i & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Vi parametriserer de to fri variable $z_2 = t$ og $z_4 = u$ og aflæser så

$$L = \{(i - it, t, 2 + iu, u) \mid t, u \in \mathbb{C}\}.$$

Opgave 2

Vi betragter afbildningen $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ givet ved

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_1 - x_2 + 3x_3$$

Det oplyses at f er surjektiv.

(a) Redegør for at f er lineær og at $\dim \ker(f) = 3$.

Den nemmeste måde at vise et f er lineær er ved at indse at den er givet ved matricen

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

men man kan selvfølgelig også checke aksiomerne $L1$ og $L2$. Da vi har fået at vide at f er surjektiv er $\dim(f(\mathbb{R}^4)) = \dim(\mathbb{R}) = 1$, så ved dimensionssætningen ender vi med

$$\dim \ker(f) = 4 - \dim(f(\mathbb{R}^4)) = 3.$$

[Det er ikke svært at argumentere for at f er surjektiv. Fx er rangen af $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ tydeligvis 1 da der er ét trin i trappeformen.]

(b) Bestem en basis for $\ker(f)$ ved at udvælge et passende antal af vektorerne

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Vi har

$$f(\mathbf{v}_1) = f(\mathbf{v}_3) = f(\mathbf{v}_4) = f(\mathbf{v}_5) = 0$$

og $f(\mathbf{v}_2) = 5$, så 4 af de 5 vektorer ligger i kernen. Vi ved at dimensionen er 3, så vi skal fravælge en af vektorerne således at de tilbageværende er lineært uafhængige. Rækkeoperationen B_{14} fører fra

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

til

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

hvorefter vi med $S_{31}(1)$ og $S_{41}(-3)$ kommer frem til

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & -6 \end{bmatrix}$$

og med $S_{42}(1)$ lander på trekantsformen

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}.$$

Vi ser nu at trinnene falder i søjle $1, 2$ og 4, så som basis kan vi vælge de vektorer der svarer til trinnene heri, altså:

$$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_5$$

Opgave 3

Ved løsning af denne opgave kan man med fordel argumentere ud fra resultaterne i det vedlagte Maple-arbejdsark.

Betragt for alle $t > 0$ matricen

$$\underline{\underline{A}}(t) = \begin{bmatrix} 7 & 2 & t \\ 2 & 10 & 2\,t \\ t^{-1} & 2\,t^{-1} & 7 \end{bmatrix}.$$

(a) Find baser for samtlige egenrum for matricen $\underline{\underline{A}}(1)$.

Fra maplearket ser vi, at $\underline{\underline{A}}(1)$ har egenværdierne 6 (med multiplicitet 2) og 12. Vi bestemmer baser for de tilhørende egenrum.

Egenværdi 6: Ved Gausselimination finder vi

$$\underline{\underline{A}}(1) - 6\underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

De to basisvektorer er derfor

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Egenværdi 12:

$$\underline{\underline{A}}(1) - 12\underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} -5 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & -6 & 12 \\ 0 & 12 & -24 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vi har i første trin først ombyttet række 1 og 3. Basisvektoren er

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Argumenter for, at $t = 1$ er den eneste værdi af $t > 0$ for hvilken der findes en ortonormalbasis for $\mathbb{R}^3$ bestående af egenvektorer for $\underline{\underline{A}}(t)$. Angiv en *ortogonal* matrix $\underline{\underline{S}}$ så $\underline{\underline{S}}\,\underline{\underline{A}}(1)\,\underline{\underline{S}}^{-1}$ er en diagonalmatrix. Opskriv den pågældende diagonalmatrix.

For $t = 1$ er matricen $\underline{\underline{A}}(1)$ symmetrisk og derfor findes en ortonormalbasis bestående af egenvektorer. For alle andre værdier af $t > 0$ er matricen ikke symmetrisk da $t \neq t^{-1}$ når $t \neq 1$. Derfor findes der ikke en ortonormalbasis af egenvektorer for $\underline{\underline{A}}(t)$ for andre parameterværdier t.

For at finde $\underline{\underline{S}}$ skal vi først finde en ortonormalbasis af egenvektorer. Vi må derfor benytte Gram-Schmidt på hvert egenrum.

Egenrummet hørende til egenværdi 6: Vi normaliserer den første vektor

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vi udregner

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Længden af denne vektor er $\sqrt{3}$.

En ortonormalbasis af egenvektorer er derfor

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Matricen $\underline{\underline{S}}^{-1}$ kan vælges med disse vektorer som søjler. Matricen $\underline{\underline{S}}$ er den transponerede, alså med vektorerne som rækker

$$\underline{\underline{S}} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

Den tilhørende diagonalmatrix er (bemærk at rækkefølgen af egenværdier svarer til rækkefølgen af egenvektorer i $\underline{\underline{S}}$)

$$\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}$$

Opgave 4

Vi betragter matricen

$$\underline{\underline{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Bestem et udtryk for $\det(\underline{\underline{C}} - \lambda \underline{\underline{E}}_{5,5})$ og bestem egenværdierne for $\underline{\underline{C}}$.

Vi får

$$\begin{aligned} \det(\underline{\underline{C}} - \lambda \underline{\underline{E}}_{5,5}) &= (-\lambda) \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} \\ &= -\lambda[(1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)(2-\lambda)] \\ &= (0-\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda)^2(3-\lambda) \end{aligned}$$

ved først at udvikle efter nederste række og siden benytte at 4×4-matricen er på trekantsform. Egenværdierne er netop rødderne i dette polynomium, altså 0, 1, 2 og 3.

(b) Redegør for at $\underline{\underline{C}}$ **ikke** er reelt diagonaliserbar.

Da det karakteristiske polynomium kan faktoriseres helt ud er summen af rodmultipliciteterne, også selv om vi regner reelt, lig med 5. For at afgøre om $\underline{\underline{C}}$ kan diagonaliseres skal vi derfor bare undersøge om $\mathrm{em}(\lambda) = \mathrm{rm}(\lambda)$ for alle egenværdierne. Dette er automatisk når $\mathrm{rm}(\lambda) = 1$, så det er kun egenværdien 2 der kan skabe problemer.

Derfor bestemmer vi em(2) ved at bestemme $\dim\ker(\underline{\underline{C}} - 2\underline{\underline{E}}_{5,5})$. To rækkeombytninger fører

$$\underline{\underline{C}} - 2\underline{\underline{E}}_{5,5} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

over i trekantsformen

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

så vi kan se at rangen er 4. Derfor er

$$\mathrm{em}(2) = \dim\ker(\underline{\underline{C}} - 2\underline{\underline{E}}_{5,5}) = 5 - 4 = 1 < \mathrm{rm}(2).$$

og $\underline{\underline{C}}$ kan ikke være diagonaliserbar.

Opgave 5

Ved løsning af denne opgave kan man med fordel argumentere ud fra resultaterne i det vedlagte Maple-arbejdsark.

Vi betragter standardbasen i $\mathbb{R}^3$

$$\mathcal{E} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

samt

$$\mathcal{A} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

(a) Vis, at $\mathcal{A}$ er en basis for $\mathbb{R}^3$ og bestem den koordinattransformationsmatrix ${}_{\mathcal{A}}\mathsf{T}_{\mathcal{E}}$, der transformerer koordinater i standardbasen til koordinater i den nye basis $\mathcal{A}$.

Da der er tre vektorer i $\mathcal{A}$ skal vi for at vise, at de udgør en basis for $\mathbb{R}^3$, blot gøre rede for, at disse vektorer er lineært uafhængige. Det er de, hvis matricen ${}_{\mathcal{E}}\mathsf{T}_{\mathcal{A}}$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

hvis søjler netop er vektorerne i $\mathcal{A}$, er invertibel. I det tilfælde er ${}_{\mathcal{A}}\mathsf{T}_{\mathcal{E}}$ den inverse til ovenstående matrix. Det følger af maplearket at matricen er invertibel og at den inverse er

$${}_{\mathcal{A}}\mathsf{T}_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ -5 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

(b) Betragt den lineære afbildning $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ givet ved

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 4x_2 - 2x_3 \\ x_1 + x_3 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 \end{pmatrix}.$$

Bestem matricen ${}_{\mathcal{E}}[f]_{\mathcal{E}}$ for f i standardbasen og matricen ${}_{\mathcal{A}}[f]_{\mathcal{A}}$ for f i den nye basis $\mathcal{A}$.

Vi aflæser fra definitionen af f, at $f(\underline{\underline{X}}) = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{X}}$, hvis

$${}_{\mathcal{E}}[f]_{\mathcal{E}} = \underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Heraf får vi

$$\begin{aligned} {}_{\mathcal{A}}[f]_{\mathcal{A}} &= {}_{\mathcal{A}}\mathsf{T}_{\mathcal{E}}\,{}_{\mathcal{E}}[f]_{\mathcal{E}}\,({}_{\mathcal{A}}\mathsf{T}_{\mathcal{E}})^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ -5 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 10 & 7 \\ 17 & -37 & -26 \\ -29 & 56 & 40 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

```
> restart: with(LinearAlgebra):
```

Opgave 3

```
> A1:=<<7,2,1>|<2,10,2>|<1,2,7>>;
```

$$A1 := \begin{bmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 2 & 10 & 2 \\ 1 & 2 & 7 \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

```
> Eigenvalues(A1);
```

$$\begin{bmatrix} 12 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

```
>
```

Opgave 5

```
> <<1,2,1>|<-1,-1,2>|<-1,-1,1>|<1,0,0>|<0,1,0>|<0,0,1>>;
```

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

```
> ReducedRowEchelonForm(%);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 3 & -1 \end{bmatrix} \tag{2.2}$$