LinAlg
Skriftlig prøve
23. januar 2006, 14–17

Dette eksamenssæt løber over 6 sider, denne side inklusive. Denne side bedes udfyldt og vedlagt besvarelsen.

- Mit eksamensnummer er __________
- Min klasselærer var:
  - ☐ Henning Brandt-Jensen
  - ☐ Michael Wermund Bruun
  - ☐ David Kyed
  - ☐ Jens Ulrik Lefmann
  - ☐ Lars Lund-Hansen
  - ☐ Martin Olsen
  - ☐ Jørn Børling Olsson
  - ☐ Dan Rasmussen
  - ☐ Jonas B. Rasmussen
  - ☐ Simon Sneider
  - ☐ *Ved ikke/Ønsker ikke at oplyse/Fulgte ikke klasseundervisning.*

Det tilstræbes, men kan ikke garanteres, at din klasselærer retter besvarelsen. Dersom dette ikke ønskes, benyttes den nederste afkrydsningsmulighed.

Vejledning

Sættet stilles til løsning over 3 timer med alle sædvanlige hjælpemidler, bortset fra at man i de første 90 minutter ikke må benytte elektroniske hjælpemidler som lommeregnere eller computere. I de sidste 90 minutter må sådanne hjælpemidler gerne benyttes, men det er ikke tilladt at argumentere ud fra dem i besvarelsen.

Man må gerne argumentere ud fra den vedlagte udskrift af en Maple-session.

De i alt ni underspørgsmål vægtes lige ved bedømmelsen. Opgaver med to underspørgsmål vægtes således dobbelt så højt som opgaver med ét underspørgsmål.

Besvarelsen kan indskrives med blyant.

Ved den samlede bedømmelse indregnes, med vægt 30%, et pointtal som blev givet med udgangspunkt i vurderinger af skriftlige opgavebesvarelser i kursets forløb.

Opgave 1

(a) Bestem samtlige løsninger til det komplekse lineære ligningssystem

$$\begin{aligned} iz_1 - z_2 &= -1 \\ z_1 + iz_2 + 2z_3 - 2iz_4 &= 4 + i \\ z_1 + iz_2 + z_3 - iz_4 &= 2 + i \end{aligned}$$

Opgave 2

Vi betragter afbildningen $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ givet ved

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_1 - x_2 + 3x_3$$

Det oplyses at f er surjektiv.

(a) Redegør for at f er lineær og at $\dim \ker(f) = 3$.

(b) Bestem en basis for $\ker(f)$ ved at udvælge et passende antal af vektorerne

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Opgave 3

Ved løsning af denne opgave kan man med fordel argumentere ud fra resultaterne i det vedlagte Maple-arbejdsark.

Betragt for alle $t > 0$ matricen

$$\underline{\underline{A}}(t) = \begin{bmatrix} 7 & 2 & t \\ 2 & 10 & 2\,t \\ t^{-1} & 2\,t^{-1} & 7 \end{bmatrix}.$$

(a) Find baser for samtlige egenrum for matricen $\underline{\underline{A}}(1)$.

(b) Argumenter for, at $t = 1$ er den eneste værdi af $t > 0$ for hvilken der findes en ortonormalbasis for $\mathbb{R}^3$ bestående af egenvektorer for $\underline{\underline{A}}(t)$. Angiv en *ortogonal* matrix $\underline{\underline{S}}$ så $\underline{\underline{S}}\,\underline{\underline{A}}(1)\,\underline{\underline{S}}^{-1}$ er en diagonalmatrix. Opskriv den pågældende diagonalmatrix.

Opgave 4

Vi betragter matricen

$$\underline{\underline{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Bestem et udtryk for $\det(\underline{\underline{C}} - \lambda \underline{\underline{E}}_{5,5})$ og bestem egenværdierne for $\underline{\underline{C}}$.

(b) Redegør for at $\underline{\underline{C}}$ **ikke** er reelt diagonaliserbar.

Opgave 5

Ved løsning af denne opgave kan man med fordel argumentere ud fra resultaterne i det vedlagte Maple-arbejdsark.

Vi betragter standardbasen i $\mathbb{R}^3$

$$\mathcal{E} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

samt

$$\mathcal{A} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

(a) Vis, at $\mathcal{A}$ er en basis for $\mathbb{R}^3$ og bestem den koordinattransformationsmatrix ${}_{\mathcal{A}}\mathsf{T}_{\mathcal{E}}$, der transformerer koordinater i standardbasen til koordinater i den nye basis $\mathcal{A}$.

(b) Betragt den lineære afbildning $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ givet ved

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 4x_2 - 2x_3 \\ x_1 + x_3 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 \end{pmatrix}.$$

Bestem matricen ${}_{\mathcal{E}}[f]_{\mathcal{E}}$ for f i standardbasen og matricen ${}_{\mathcal{A}}[f]_{\mathcal{A}}$ for f i den nye basis $\mathcal{A}$.

```
> restart: with(LinearAlgebra):
```

Opgave 3

```
> A1:=<<7,2,1>|<2,10,2>|<1,2,7>>;
```

$$A1 := \begin{bmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 2 & 10 & 2 \\ 1 & 2 & 7 \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

```
> Eigenvalues(A1);
```

$$\begin{bmatrix} 12 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

```
>
```

Opgave 5

```
> <<1,2,1>|<-1,-1,2>|<-1,-1,1>|<1,0,0>|<0,1,0>|<0,0,1>>;
```

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

```
> ReducedRowEchelonForm(%);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 3 & -1 \end{bmatrix} \tag{2.2}$$