Københavns Universitet
Eksamen ved det Naturvidenskabelige Fakultet
Matematik 1GA
6. januar 2003, 14–18

Dette eksamenssæt løber over 4 sider, denne side inklusive. Denne side bedes udfyldt og vedlagt besvarelsen.

- Mit eksamensnummer er __________
- Min klasselærer i efterårssemestret var
  - ☐ Simon Sneider
  - ☐ Flemming Topsøe
  - ☐ Jens Ulrik Lefmann
  - ☐ Henning Brandt-Jensen
  - ☐ Christian Berg
  - ☐ Martin Olsen
  - ☐ Sine Rikke Jensen
  - ☐ Tommy Bülow
  - ☐ Henrik Holm
  - ☐ Peter Juul Trosborg
  - ☐ Iver Ottosen
  - ☐ *Ved ikke/Fulgte ikke øvelser/Ønsker ikke at oplyse*
- En midlertidig overgangsordning giver mulighed for godskrivelse af points for eksaminander der har fået godkendt obligatoriske opgaver ved Matematik 1GA i efterårssemestret 2001 eller tidligere.
  - ☐ Ja, jeg har fået godkendt opgaver i efterårssemestret __________ og ønsker at benytte mig af overgangsordningen.

  Hvis du ikke kan huske hvilket år du fik godkendt opgaver, så sæt kryds alligevel.

Vejledning

Opgavesættet til besvarelse over 4 timer består af fire opgaver benævnt 1, 2, 3 og 4, hver med tre underspørgsmål benævnt (a), (b) og (c). De tolv underspørgsmål vægtes lige ved bedømmelsen. I den samlede vurdering af kurset indgår en pointscore fra afleverede skriftlige opgaver.

Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladte. Besvarelsen kan indskrives med blyant.

Opgave 1

Vi udstyrer $\mathbb{R}^4$ med det sædvanlige indre produkt og den tilhørende sædvanlige afstandsfunktion.

(a) Udfør Gram-Schmidt ortogonaliseringsproceduren på vektorerne

$$(3,0,4,0),(1,0,-1,0),(0,1,0,1).$$

Nedskriv hvert skridt i proceduren.

(b) Redegør for at resultatet af ortogonaliseringsproceduren i spørgsmål (a) giver en ortonormalbasis for underrummet

$$V = \operatorname{span}((3,0,4,0),(4,1,3,1),(1,0,-1,0),(0,1,0,1))$$

af $\mathbb{R}^4$.

~~(c) Betragt nu vektoren~~

$$\cancel{\mathbf{w} = (1,3,1,0).}$$

~~Find projektionen af $\mathbf{w}$ ned på V. Vis at der gælder~~

$$\cancel{\|\mathbf{w}-\mathbf{v}\| \geq \frac{3}{\sqrt{2}}}$$

~~for enhver vektor $\mathbf{v} \in V$.~~

~~Opgave 2~~

~~Lad $u, v \in \mathbb{C}$ være de to rødder i den komplekse andengradsligning~~

$$\cancel{15z^2 - (23 + 14i)z + (3 + 9i) = 0},$$

~~bestemt ved, at $|u| < |v|$.~~

(*a*) ~~Eftervis, at $(13 + 4i)^2 = 153 + 104i$. Find herefter u og v ved hjælp af den sædvanlige formel, jf. [P, Eksempel 2.9].~~

~~(*b*) Vis, at $\sum_{n=0}^{\infty} u^n = v$.~~

~~(*c*) Afgør, om rækken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n^3 \cos(n) v^n}{3^n}$ er konvergent~~ i $\mathbb{C}$.

Opgave 3

Som sædvanligt betegner $\mathbb{P}_2$ vektorrummet bestående af andengradspolynomier defineret på hele $\mathbb{R}$. Betragt afbildningen $T\colon \mathbb{P}_2 \to \mathbb{R}$ defineret ved:

$$T(p) = \det \begin{bmatrix} 1 & p(0) & 4 \\ 2 & p(-1) & 5 \\ 3 & p'(1) & 6 \end{bmatrix}$$

for $p \in \mathbb{P}_2$. Det oplyses, og behøver ikke eftervises, at T er en lineær afbildning.

(*a*) Bestem $T(1)$, $T(x)$ og $T(x^2)$. Find den matrix som repræsenterer afbildningen T med hensyn til basen $B = \{1, x, x^2\}$ for $\mathbb{P}_2$ og standardbasen B' for $\mathbb{R}$.

(*b*) Vis at T er surjektiv, og udregn dimensionen af kernen $\operatorname{Ker} T$. Bestem endvidere en basis for $\operatorname{Ker} T$.

(*c*) En anden lineær afbildning $S : \mathbb{P}_2 \longrightarrow \mathbb{P}_2$ har matricen

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

med hensyn til basen B. Bestem matricen for $T \circ S$ med hensyn til B og B'. Beregn $T(S(x^2))$.

Opgave 4

I denne opgave betragtes tre reelle tal r, s, t som holdes fast igennem hele opgaven. Det oplyses at matricen

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & r & 1 \\ -4 & 0 & s & 4 \\ -1 & 1 & t & 7 \end{array}\right]$$

ved en sekvens af rækkeoperationer kan omformes til

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right]$$

(a) Anfør tre yderligere rækkeoperationer, der omformer den sidstnævnte matrix til reduceret rækkeechelonform, og opskriv den reducerede matrix.

(b) Opskriv løsningsmængderne til ligningssystemerne

$$\begin{aligned} -x_1 - x_2 + rx_3 &= 1 \\ -4x_1 + sx_3 &= 4 \\ -x_1 + x_2 + tx_3 &= 7 \end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned} -x_1 - x_2 + rx_3 &= 0 \\ -4x_1 + sx_3 &= 0 \\ -x_1 + x_2 + tx_3 &= 0 \end{aligned}$$

med ubekendte x_1, x_2 og x_3.

(c) Vi betragter nu matricen

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & r \\ -4 & 0 & s \\ -1 & 1 & t \end{bmatrix}$$

Bestem $\det(A)$. Vis, at der findes en 3×3-matrix B så $A + B$ er invertibel.