Session 9-10.

Program. Den femte uge har overskriften „Sylows sætninger“ på basis af GRP8, men jeg når nok også at definere, hvad en ring er. Øvelserne: Tirsdag 20/5 er det GRP5: 31, 32; SYM3: 3, 4, 5, 6, 8; GRP8: 1 .

Og fredag 23/5 er det **OBL**; SYM5: 1, 2; GRP8: 2, 3, 4, 5, 7, 8, 10, 12 .

Bemærk. Pensum er fastlagt (se hjemmesiden). Det afviger fra pensum sidste år ved at SYM4 og SYM5 nu er udgået af pensum. Bemærk også, at den obligatoriske opgave nu ligger på nettet. Du kan finde opgaven, og nærmere oplysninger om den, fra hjemmesiden.

Nøgleord: Ortogonal afbildning, drejning om punkt og om linie, spejling, egentlig og uegentlig flytning, translation, skruning, drejespejling, glidespejling, translatere nulpunktet, tyngdepunktet, symmetrigruppe, Hexaedergruppen, Oktaedergruppen, Tetraedergruppen.

Kommentar. Syllows sætninger er nogle fundamentale resultater om undergrupper i en endelig gruppe G. De anvendes bl.a. til at klassificere endelige grupper. Kapitel GRP8 er kursorisk, så ved eksamen kræves ikke kendskab til beviserne (men der kræves kendskab til anvendelserne).

Antag, at G har orden n, og betragt en primopløsning $n = \cdots p^\nu \cdots$. En Sylow-p-undergruppe af G (hvor p altså er en primdivisor i n) er en undergruppe af orden p^ν. Sylows sætninger siger lidt løst, at sådan nogen findes og at der er nogle begrænsninger på antallet af dem.

En gruppe $G \neq \{e\}$ er *simpel*, hvis de eneste normale undergrupper i G er de to trivielle. Fx er den cykliske gruppe C_p af primtalsorden p en simpel gruppe.

Lad N være en normal undergruppe i G (herfor skrives ofte $N \triangleleft G$), og lad $Q := G/N$ være kvotientgruppen. Gruppen G kan da opfattes som „sammenklistret“ af grupperne N og Q i følgende forstand: Elementerne q i Q er sideklasser modulo N, så for hvert $q \in Q$ kan vi tænke os valgt en repræsentant $s_q \in G$. Herefter er G den disjunkte forening af sideklasserne $s_q N$, og hvert element $g \in G$ kan altså skrive $g = s_q n$, med entydigt bestemte $q \in Q, n \in N$. Som mængde kan vi altså identificere: $G = Q \times N$. Sammenklistringen består i hvordan multiplikationen i G er bestemt ud fra multiplikationen i N og i Q. Hvis G ikke er simpel, har G en ikke-triviel normal undergruppe N, og G kan „nedbrydes“ til N og Q som begge har mindre orden end G. Hvis N og/eller Q ikke er simple kan de yderligere nedbrydes. I denne løse forstand er de simple grupper dem, der ikke kan nedbrydes yderligere, og de er byggestenene for alle grupper: en endelig gruppe G kan opfattes som opbygget af simple grupper. Lidt mere præcist: Der findes en „kæde“ af normale undergrupper,

$$\{1\} = N_0 \triangleleft N_1 \triangleleft N_2 \triangleleft \cdots \triangleleft N_r = G,$$

hvor de successive kvotienter N_i/N_{i-1} er simple grupper. For de symmetriske grupper S_n for $n = 2, 3, 4$ får vi kæderne,

$$\underbrace{\{1\} \triangleleft \mathrm{S}_2}_{\mathrm{C}_2}, \quad \underbrace{\{1\} \triangleleft \mathrm{A}_3}_{\mathrm{C}_3} \underbrace{\triangleleft \mathrm{S}_3}_{\mathrm{C}_2}, \quad \underbrace{\{1\} \triangleleft \mathrm{C}_2}_{\mathrm{C}_2} \underbrace{\triangleleft \mathrm{V}}_{\mathrm{C}_2} \underbrace{\triangleleft \mathrm{A}_4}_{\mathrm{C}_3} \underbrace{\triangleleft \mathrm{S}_4}_{\mathrm{C}_2},$$

hvor de successive kvotienter, som antydet, er cykliske af ordener 2 og 3. Det er faktisk eksistensen af disse kæder, hvis successive kvotienter er cykliske grupper, der sikrer, at rødderne i polynomier af grad $n = 2, 3, 4$ kan udtrykkes ved kvadrat- og kubikrødder af udtryk i polynomiets koefficienter. Det er dybtliggende, at det tilsvarende resultat *ikke* gælder for polynomier af grad $n \geqslant 5$ (Abel's sætning); det bygger afgørende på, at A_n så er en simpel gruppe.

Kuglerne.
• *Det er ikke helt oplagt*, i klassifikationenen af flytninger i planen og rummet, hvortil man skal medregne den identiske afbildning id. Man kan opfatte id som en translation med translationsvektor 0 (og så kan man tale om *gruppen* af alle translationer), eller – for en given linie i rummet – som en drejning med vinklen 0 omkring linien (og så kan man fx tale om *gruppen* af drejninger omkring linien). Eller: Man kan hævde, at id udgør sin egen lille klasse, og så er klasserne disjunkte (hvad klasser i en klassedeling i hvert fald bør være).

• *Det er nemt at bestemme fixpunkter*, for en flytning $f(x) = Ax + b$, der har fixpunkter. Ligningen $f(x) = x$, altså $Ax + b = x$, er jo blot et lineært ligningssystem: $(1 - A)x = b$, hvor 1 er enhedsmatricen.

• *Symmetrigruppen*, betegnet $\mathrm{E}(K)$, for en punktmængde $K \subseteq \mathbb{R}^n$ består af de flytninger i $g \in \mathrm{E}(n)$, som opfylder $g(K) = K$, og $\mathrm{E}^+(K) \subseteq \mathrm{E}(K)$ består af de egentlige flytninger.

For $n = 2$: Hvis $K =$ hjørnerne i en regulær k-kant, så er $\mathrm{E}(K) =$ diedergruppen D_k og $\mathrm{E}^+(K)$ er undergruppen C_k af drejninger. Der er ikke andre endelige undergrupper af $\mathrm{E}(2)$.

For $n = 3$: Det let at beskrive de endelige undergrupper af $\mathrm{E}^+(3)$. De vigtigste er diedergrupperne D_k (symmetrigruppen for en regulær k-kant som en 2-side), og symmetrigrupperne for et tetraeder (en 4-side), et heksaeder (en 6-side), og et dodekaeder (en 12-side).

• *Sylow-p-undergrupper af G*, hvor p er et primtal, er undergrupper hvis orden er den størst mulige potens af p, der går op i ordenen af G.

• *Sylow's sætninger. Lad Syl_p være mængden af Sylow-p-undergrupper af en given gruppe G. Da gælder:* (1) *$Syl_p \neq \emptyset$.* (2) *Hvis $S', S \in Syl_p$, så findes $g \in G$ så $S' = gSg^{-1}$.* (3) *Antallet $|Syl_p|$ er $\equiv 1 \pmod p$ og divisor i $|G|$.* (4) *$|Syl_p| = 1$, hvis og kun hvis en af Sylow-p-undergrupperne er normal.*

Påstand (4) er en let konsekvens af de øvrige.

• *Gruppen er produktet af sine Sylowundergrupper, $G = S_1 \times \cdots \times S_r$, hvis der for hver primdivsor p_i i G's orden kun findes én Sylow-p_i-undergruppe S_i.*

• *Smågrupper.* Sylow's sætninger er vigtige redskaber i klassifikationen af endelige grupper. Du kan fx udvide din helt egen liste over smågrupper ved at bruge følgende (p og q er primtal):

(1) Hvis $|G| = qp$ med $q < p$ og $p \not\equiv 1 \pmod q$, så er $G = \mathrm{C}_{qp}$.
(2) Hvis $|G| = 2p$, så er enten $G = \mathrm{C}_{2p}$ eller $G = \mathrm{D}_p$.
(3) Hvis $|G| = p^2$, så er enten $G = \mathrm{C}_{p^2}$ eller $G = \mathrm{C}_p \times \mathrm{C}_p$.

(Det sidste har naturligvis intet med Sylow's sætninger at gøre!)

Hvornår var det nu det var? Niels Henrik Abel 1802–1829, Peter Ludwig Mejdell Sylow 1832–1918.

På sigt: Den sjette uge har overskriften „Ring, polynomier, rødder", på basis af RNG1 og POL1-2. Øvelserne: Tirsdag 27/5 er det GRP8: 9, 11, 13, 15*, 16; RNG1: 1, 2, 5 .

Og fredag 30/5 er det RNG1: $\underline{\mathbf{4}}$, 3, 6, 12, 13, 16, 18; POL1: 1, 2, 3, $\underline{\mathbf{7}}$.