Session 7-8.

Program. Den fjerde uge har overskriften „Symmetrier" på basis af SYM1-3 og SYM4-6 (kursorisk). Øvelserne: Tirsdag 13/5 er det GRP7: 15, 17, 18, 21, 22; SYM1: 1, 2, 3 .

Og fredag 16/5 er det GRP7: **14**, 23, 24*, 27; SYM1: 6; SYM2: 1, 2, **3**; SYM3: 1, 2 .

Bemærk, at ugen med symmetrier er tænkt som et afslappende intermezzo midt i den abstrakte teori for grupper. Måske er vi nødt til at gøre et enkelt punkt om gruppers virkning færdigt.

Nøgleord: Virkning af gruppe G på mængde X, repræsentation $G \to \mathrm{Perm}(X)$, triviel virkning, invariant (eller stabil) delmængde, restriktion af virkning, virkning på $\mathcal{F} = F^X$, translation, Cayley's Sætning, G-ækvivalens, bane $G.x$, banelængde, banerum X/G, fixpunktsmængde X^g for g, isotropigruppe G_x for x, fixpuntksmængde X^G for virkning, p-gruppe, Baneformlen, Klasseformlen, konjugering, centrum, centralisator, konjugerede permutationer, Burnside's Formel, Polya's Formel, farvelægning, mønstre.

Kommentar. Whops!, – så var der fortvivlende mange nøgleord.

Det er vigtigt at forstå anvendelsen af gruppevirkninger på mønstre: Her fortolkes X som en mængde af pladser. For en given mængde F (af farver) fortolkes afbildninger $\varphi\colon X \to F$ som *farvelægninger* af X, idet værdien $\varphi(x) \in F$ fortæller, hvilken farve der er lagt på pladsen x. Gruppen G virker på mængden F^X af farvelægninger, idet $g.\varphi$ er den farvelægning, der bestemmes ved, at farven på pladsen x flyttes hen på pladsen $g.x$, altså ved ligningen $(g.\varphi)(g.x) = \varphi(x)$. Banerne, der også kaldes *mønstre*, består af farvelægninger, der i en vis forstand er ens. Det er vigtigt at kunne bestemme antallet af farvelægninger, der er invariante under et givet gruppeelement g.

Fx kan X være de 64 pladser i en 8×8 matrix (et skakbræt) og $F = \{\square, \blacksquare\}$ kan være mængden med to farver. En afbildning $\varphi\colon X \to F$ fortæller hvilke af de to farver, der er lagt på hver af de 64 felter. Gruppen, der virker på skakbrættets felter, kan naturligt være Diedergruppen D_4 af orden 8. Et skakbræt-mønster er herefter en *bane* af ækvivalente farvelægninger, og antallet af baner er antallet af forskellige mønstre på skakbrættet. Antag fx, at g er spejlingen i en given diagonal. En farvelægning invariant under g kan have vilkårlige farver på de 8 felter i diagonalen, men hvert af de $(64-8)/2 = 28$ felter over diagonalen skal have samme farve som sit spejlbillede under diagonalen. Der er derfor ialt $2^{8+28} = 2^{36}$ farvelægninger invariante under g.

Kommentar. Ortogonale afbildninger (definitionen regnes for velkendt) spiller en vigtig rolle i planens og rummets geometri. De indgår i flytninger, og dermed i symmetrigrupperne for de ting, der omgiver os. SYM1 indeholder beskrivelsen af den ortogonale gruppe $\mathrm{O}(n) = \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. Den *specielle ortogonale gruppe* $\mathrm{O}^+(n) = \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ er undergruppen af $\mathrm{O}(n)$ bestående af matricer med determinant 1. Den beskriver de orienteringsbevarende, ortogonale afbildninger. For $n = 2$ er det drejninger omkring omkring origo (nulvektoren). Du skal også kende hovedresultatet for $n = 3$:

De ortogonale, orienteringsbevarende afbildninger $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *er netop drejningerne omkring akser (linier) gennem origo.*

Det er klart, at de beskrevne afbildninger er ortogonale (dvs lineære og afstandsbevarende), men det er slet ikke klart, at der ikke kan være andre. Hvis man fx i $\mathbb{R}^3$ først drejer en vinkel v

omkring én akse, og derefter en vinkel w omkring en anden akse, så er resultatet selvfølgelig en ortogonal afbildning, og dermed, ifølge hovedresultatet, en drejning omkring en (tredie) akse; det er da ikke så oplagt, vel?

De ortogonale afbildninger er de lineære isometrier af $\mathbb{R}^n$, men man kan betragte vilkårlige isometrier af $\mathbb{R}^n$, også kaldet *flytninger*. Fx er en translationen $x \mapsto x+b$ (med en fast vektor b) øjensynlig en flytning. Det er et hovedresultat, at der ikke er andre flytninger, end dem man lige kan finde på i farten, nemlig afbildninger af formen $x \mapsto Ax + b$ med $A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

Når man skal beskrive flytninger, kan det af og til betale sig at „flytte origo“, dvs beskrive punkter $x \in \mathbb{R}^n$ set ud fra et fast valgt ståsted u ved deres *stedvektor* $x - u$.

Det er lidt teknisk, at efter et sådant skift af ståsted kan man antage at flytningen har formen $x \mapsto Ax + b$, med det ekstra krav at $Ab = b$. Og det er grundlaget for den geometriske klassifikation af alle flytninger i planen ($n = 2$) og i rummet ($n = 3$).

Det hører med til almindelig dannelse at vide, at enhver endelig gruppe G af flytninger har et fælles fixpunkt; med dette fixpunkt som origo er altså $G \subseteq \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. Endelig skal man da kende de endelig undergrupper af $\mathrm{SO}(3)$; de fremkommer som symmetrigrupper for de regulære polyedre.

Blandt de uendelige undergrupper af flytninger i planen er de såkaldte tapetgrupper. Selv om det ikke hører med til pensum nævner jeg dem lige, og der er endda et par opgaver i SYM5.

Kuglerne.

• *Burnside's formel.* #(baner)= $|X/G| = |G|^{-1}\sum_g |X^g|$.

• *Polya's formel.* #(mønstre)= $|\mathcal{F}/G| = |G|^{-1}\sum_g |F|^{m_g}$, *hvor* m_g *er antallet af cykler i permutationen* g_X*, dvs permutationen af* X *bestemt ved* g*. Her er* X *en endelig mængde (af pladser),* F *en endelig mængde (af farver), og mængden* $\mathcal{F} = F^X$*, af afbildninger* $\varphi\colon X \to F$*, opfattes som mængden af farvninger af pladserne.*

• *De eneste endelige* undergrupper af $\mathrm{O}(2)$ er diedergrupperne D_n og de cykliske undergrupper C_n.

• *Isometrierne* af $\mathbb{R}^n$ er netop afbildningerne af formen $x \mapsto Ax + b$, hvor $A \in \mathrm{O}(n)$. Den kaldes *egentlig*, hvis $A \in \mathrm{SO}(n)$; intuitivt svarer det til at flytningen er orienteringsbevarende.

• *I planen* $\mathbb{R}^2$ er en egentlig flytning enten (1) en translation eller (2) en drejning omkring et punkt.

En uegentlig flytning er enten (1) en spejling i en linie eller (2) en glidespejling.

• *I rummet* $\mathbb{R}^3$ er en egentlig flytning enten (1) en translation, eller (2) en drejning omkring en linie, eller (3) en skruning (dvs en en drejning om en linie efterfulgt af en translation i liniens retning).

Hvornår var det nu det var? William Burnside 1852–1927, George Pólya 1887–1985.

På sigt: Den femte uge er overskriften „Sylow's sætninger“ på basis af GRP8 (kursorisk).

Øvelserne: Tirsdag 20/5 er det GRP5: 31, 32; SYM3: 3, 4, 5, 6, 8; GRP8: 1 .

Og fredag 23/5 er det **OBL**; SYM5: 1, 2; GRP8: 2, 3, 4, 5, 7, 8, 10, 12 .

Anders Thorup