Obligatorisk opgave i Algebra 1, 2008

Besvarelsen afleveres senest fredag den 23/5 kl 10.00. Se yderligere information om afleveringen på næste side.

1. Om en permutation $\sigma \in S_8$ vides, at $\sigma^3 = (4\,5\,6\,7\,8)$ og at $\sigma^5 = (1\,2\,3)$. Bestem σ. Vis, at σ er lige, og bestem index af $\langle\sigma\rangle$ i A_8.

2. I en kommutativ gruppe af orden 200 findes 4 elementer af orden 10. Vis, at gruppen er cyklisk. Angiv en kommutativ gruppe af orden 200, der har 12 elementer af orden 10.

3. Bestem antallet af abelske grupper af orden 4000 (på nær isomorfi).

4. Lad $\varphi\colon G \to G'$ være en gruppehomomorfi. Antag, at G er cyklisk. Vis, at billedgruppen $\varphi(G)$ er cyklisk.

5. Lad $\varphi\colon C_{28} \to A_5$ være en ikke-triviel homomorfi, og lad d være ordenen af billedet. Vis, at $d \mid 28$. Vis, at $7 \nmid d$. Vis, at $d \neq 4$. Begrund, at $d = 2$. Vis, at der er 15 ikke-trivielle homomorfier $C_{28} \to A_5$.

6. Betragt 5-cyklen $\sigma = (1\,2\,3\,4\,5)$ som permutation i S_6. Bestem antallet af permutationer i S_6 som er konjugerede med σ. Angiv dernæst permutationerne i centralisatoren for σ.

7. Vis, at Klein's Vierer-gruppe V er isomorf med en undergruppe af diedergruppen D_n, hvis og kun hvis n er lige.

8. Betragt nedenstående 6 grupper:

$$G_1 := C_2 \times C_6 \times C_{36}, \quad G_2 := C_4 \times C_4 \times C_{27}, \quad G_3 := C_3 \times C_4 \times C_{36},$$
$$G_4 := C_4 \times C_6 \times C_{18}, \quad G_5 := C_4 \times C_9 \times C_{12}, \quad G_6 := C_4 \times C_{108}\,.$$

Bestem de par (i, j) med $i < j$ for hvilke grupperne G_i og G_j er isomorfe.

9. Gruppen S_4 virker på talrummet $\mathbb{R}^4$ ved, for vektorer $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$, at permutere de 4 koordinater. Bestem isotropigruppen for vektoren $x = (1, 0, 0, 1)$, og bestem banen gennem x. Angiv en vektor, hvis isotropigruppe har orden 6.

10. Hvor mange perlekæder med 9 perler kan der laves, når der er to farver perler at vælge imellem?

11. Hvor mange karusseller med 9 heste kan der laves, når der er to farver (træ-)heste at vælge imellem?

12. En drejning $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ bestemmes ved $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Bestem drejningsvinkel og fixpunkt for f. Bestem potensen f^{2008}.

13. Betragt i diedergruppen D_{1004} drejningen D med vinklen $2\pi/1004$ og spejlingen S i førsteaksen. Som bekendt er $SDS^{-1} = D^{-1}$. Vis, at $C(D) = \langle D\rangle$. For hvilke i er $SD^iS^{-1} = D^i$. Bestem centret for D_{1004}.

14. Lad $\varphi\colon \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/8 \to \mathbb{Z}/4$ være en surjektiv gruppehomomorfi. Vis, at kernen, som kommutativ gruppe, er isomorf med $\mathbb{Z}/4$ eller $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$. Vis, at begge muligheder kan forekomme (med passende valg af φ).

15. Antag, at $d \mid n$. Vis, at $[a]_n \mapsto [a]_d$ er en veldefineret homomorfi $(\mathbb{Z}/n)^* \to (\mathbb{Z}/d)^*$. Vis, at homomorfien er surjektiv, hvis n er en primtalspotens. Vis, at homomorfien er surjektiv for alle naturlige tal n. Hvor mange primiske restklasser $[a]_{5000}$ modulo 5000 opfylder, at $a \equiv 1 \pmod 5$?

Om den obligatoriske opgave i Algebra 1, 2008.

Omstående opgave er den obligatoriske opgave i kurset Algebra 1, 2008. Godkendelse af denne opgave kræves for at man kan gå til eksamen i Algebra 1.

Som nævnt nedenfor *skal besvarelsen være individuel*. Det betyder, at hver enkelt student selvstændigt skal udforme sin besvarelse. Det præciseres her på Algebra 1 sådan: Du må gerne diskutere opgaverne med andre, og gerne ved en tavle eller et stykke papir; men du må under ingen omstændigheder skrive af – eller kopiere – hvad andre har skrevet i relation til opgaverne, og du må ikke kigge på andres besvarelser, medens du udformer din egen.

Her er en række yderligere informationer om den obligatoriske opgave:

- Besvarelsen skal afleveres senest fredag den 23/5 kl 10.00. Hvis man går på et øvelseshold, afleveres til holdets instruktor. Det er en betingelse, at man er registreret på holdet i UA-systemet. Hvis man ikke går til øvelser, træffes aftale om registrering med forelæseren.
- Alle 15 spørgsmål skal være besvaret for at opgaven kan godkendes.
- Besvarelsen skal være individuel.
- Besvarelsen skal afleveres på papir.
- Fra sin „profil" kan man se „Bedømmelser fra UA". Her kan man løbende følge med i sin opgaves status. Man kan komme til sin profil fra en vilkårlig SISk-hjemmeside; prøv eventuelt med linket `https://www.isis.ku.dk/myprofile/`.
- Besvarelserne er bedømt senest tirsdag den 27/5 ved øvelsernes begyndelse.
- Hvis man ikke får godkendt sin besvarelse, vil der være mulighed for at *genaflevere* efter følgende procedure:
  - Genaflevering senest kl 10.00 til instruktoren ved øvelserne fredag den 30/5.
  - Bedømmelsen foreligger senest ved øvelserne tirsdag den 3/6.
  - Eventuelle problemer herefter afklares med Anders Thorup.