

Facitliste til nyere eksamensopgaver

Listen indeholder facit (eller vink) til eksamensopgaverne (i Mat2AL, Alg2 og Alg1) fra sommeren 2003 og fremefter. Bemærk, at de facitter, der står på listen, næsten *aldrig* er tilstrækkeligt svar på opgaven.

Sommer 2003

1. 30.
2. $\sigma = (0\ 1)(2\ 3\ 4\ 5\ 6)(7\ 8\ 9)$, type = $2^1 3^1 5^1$, orden = 30 og fortegn = -1 .
3. 15.
4. Cykeltyperne: $1^4 2^1$, $1^2 2^2$ og 2^3 . Antallet = $15 + 45 + 15 + 1 = 76$.
5. Ja, $\sigma = (1\ 2)(3\ 4)$ eller $(1\ 4)(2\ 3)$; ja, $\sigma = (1\ 3)$ eller $(2\ 4)$; og nej.
6. $C_8 \times C_2 \times C_5$ og $C_4 \times C_4 \times C_5$.
7. Fx fire af følgende: $Q_8 \times C_{15}$ (1), $D_4 \times C_{15}$ (5), $A_4 \times C_{10}$ eller $D_3 \times C_{20}$ (7), $S_4 \times C_5$ (9), $D_5 \times C_{12}$ (11), $D_{12} \times C_5$ (13), $D_6 \times C_{10}$ (15), $D_{20} \times C_3$ (21), $D_{10} \times C_6$ eller $A_4 \times D_5$ (23), S_5 (25), $A_5 \times C_2$ eller $D_{15} \times C_4$ (31), $D_6 \times D_5 = D_{10} \times D_3$ (47), D_{60} (61), $D_{30} \times C_2$ (63), ...
8. En Sylow-7-undergruppe er normal; ikke tilsvarende for Sylow-19-undergrupperne.
9. Homomorfien kan angives som $z \mapsto z^3$, idet elementerne i C_{15} og C_{10} er komplekse tal; eller som $\zeta_{15}^i \mapsto \zeta_{10}^{2i}$ (kan alternativt angives additivt: $i \pmod{15} \mapsto 2i \pmod{10}$); eller som $(x, y) \mapsto (x, 1)$ under identifikationen $C_{15} = C_5 \times C_3$ og $C_{10} = C_5 \times C_2$; eller som $C_{15} \rightarrow C_{15}/C_3 = C_5 \rightarrow C_{10}$ under de naturlige inklusioner $C_3 \subset C_{15}$ og $C_5 \subset C_{10}$.
10. $(2p)^{-1}(2^p + (p-1) \cdot 2 + p \cdot 2^{(p+1)/2})$.
11. $2002 = -i(1+i)^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot (3+2i)(3-2i)$ og 2003 er et primelement. Antallene er 192 (eller 48 bortset fra associering) og 8 (eller 2 bortset fra associering).
12. 2 i \mathbb{R} , 2002 i \mathbb{C} , 2002 i \mathbb{F}_{2003} og 14 i \mathbb{F}_{29} .
13. f er reducibel i $\mathbb{R}[X]$.
14. f er irreducibel i $\mathbb{Q}[X]$.
15. $f = (X^2 - 44)(X^2 + 44)$ er reducibel i $\mathbb{F}_{2003}[X]$.

Vinter 2003/04

1. 55.
2. 12.
3. $(0)(1\ 2\ 4\ 8)(3\ 6\ 12\ 9)(5\ 10)(7\ 14\ 13\ 11)$. Type $1^1 2^1 4^3$. Orden 4. Fortegn 1.
4. $2^1 6^1$, $2^1 3^1 6^1$, $2^2 3^1$, $2^2 3^2$, $2^4 3^1$.
5. Benyt, at γ og γ^{-1} er konjugerede, fordi de har samme cykeltype, ...
6. $C_2 \times C_3 \times C_{27}$ og $C_2 \times C_9 \times C_9$.
7. Fx fire af: A_5 , $A_4 \times C_5$, $D_{30} = D_{15} \times C_2$, $D_{10} \times C_3$, $D_6 \times C_5 = D_3 \times C_{10}$, $D_3 \times D_5$.
8. Benyt Sylow's sætninger, ...
9. 24.

30. juli 2008

10. Ordenen af billedet er 2. Med sign: $S_4 \rightarrow C_2$ er $S_4 \rightarrow C_2 \hookrightarrow C_{10}$ et eksempel.
11. $(2^9 + 6 \cdot 2 + 2 \cdot 2^3 + 9 \cdot 2^5)/18 = 46$.
12. $5 = (2+i)(2-i)$, $5+i = (1+i)(3-2i)$, $5+2i =$ primelement, $5+3i = (1+i)(4-i)$.
13. f er reducibel i $\mathbb{R}[X]$.
14. f er irreducibel i $\mathbb{Q}[X]$.
15. $f = X^6 + 1$ i $\mathbb{F}_{13}[X]$, og f er reducibel, idet fx 2 er rod.

Sommer 2004

1. 166.
2. $(0\ 3\ 8\ 9\ 6\ 10\ 2)(1\ 4)(5\ 7)$; $2^2 7^1$; orden 14, sign = 1.
3. $(1\ 4\ 2\ 5\ 3)$, $(1\ 4\ 3\ 2\ 5)$, $(1\ 4)(2\ 5)(3)$, $(1\ 5)(2\ 4\ 3)$, $(1\ 5\ 3)(2\ 4)$, $(1\ 5\ 2\ 4)(3)$. De første tre er de lige af dem.
4. —
5. Der er 6 abelske grupper af orden 72, – med 56, 24, 14, 8, 6, og 2 elementer af orden 6.
6. $\varphi(16) = 8$, så $|(\mathbb{Z}/16)^*| = 8$, svarende til restklasserne af 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15. Kvadraterne er 1, 9, 9, 1, 1, 9, 9, 1, specielt 3 elementer af orden 2. Det udelukker C_8 og $C_2 \times C_2 \times C_2$, tilbage bliver muligheden $(\mathbb{Z}/16)^* = C_4 \times C_2$.
7. $S_2 \times S_3 \subset S_5$, bestående af de permutationer, der stabiliserer $\{1, 2\}$ og $\{3, 4, 5\}$; den har orden 12. Banen består af alle 2-element-delmængder $\{a, b\}$.
8. $\#Syl_7 = 1$, da 11, 13 og 11·13 er udelukket. Tilsvarende: $\#Syl_{11} = 1$, $\#Syl_{13} = 1$. Derfor er G produktet af sine Sylow-undergrupper, og dermed $G = C_7 \times C_{11} \times C_{13} = C_{1001}$.
9. Sæt $H := \{\sigma^i \tau^j\}$. Brug $\sigma \tau = \tau \sigma$: Først, da $\sigma^i \tau^j \sigma^k \tau^l = \sigma^{i+k} \tau^{j+l}$, er H stabil. Videre er $e = \sigma^0 \tau^0 \in H$. Og for $h = \sigma^i \tau^j$ er $h^{-1} = \sigma^{-i} \tau^{-j} \in H$.
Tilsvarende udgør produkter af potenser af 3 disjunkte 5-cykler en undergruppe af orden $5^3 = 125$, isomorf med $C_5 \times C_5 \times C_5$. Tallet 5 forekommer 3 gange i primopløsningen af $15!$, så undergruppen er en Sylow-5-undergruppe af S_{15} . Da Sylow-5-undergrupperne parvis er konjugerede, er de specielt alle isomorfe med den fundne.
10. $|G| = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ giver mulighederne 1, 4, 10; der er 1 i C_{60} , og 4 i $C_5 \times A_4$, og 10 i A_5 .
11. $\frac{1}{8}(3^8 + 2 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3^4 + 2 \cdot 3^5 + 2 \cdot 3^5) = 954$.
12. $(53 - 12\sqrt{11})/(3 - 2\sqrt{11}) = 3 - 2\sqrt{11}$, og $(3 - 2\sqrt{11})/(4 - \sqrt{11}) = -2 - \sqrt{11}$, så $(53 - 12\sqrt{11}) = (4 - \sqrt{11})^2(-2 - \sqrt{11})^2$ [også $= (7 + 2\sqrt{11})^2(13 - 4\sqrt{11})^2$].
13. Nej.
14. Ja, anvend Eisenstein på $f(X+1) = X^4 + 4X^3 + 18X^2 + 28X + 22$ med $p = 2$.
15. $(X-a)(X+a)(X-3/a)(X+3/a) = (X^2 - a^2)(X^2 - 9/a^2) = X^4 - (a^2 + 9/a^2)X^2 + 9$, og altså = $f(X)$ netop når $a^2 + 9/a^2 = -12$, dvs netop når $f(a) = 0$.

Vinter 2004–05

1. 1600; 400.
2. $(1\ 3)(2\ 4\ 5\ 6\ 8)(7\ 9)$; $2^2 5^1$; 10; 1; $(2\ 8\ 6\ 5\ 4)$.
3. 176.
4. $1^2 4^1$, $2^1 4^1$.

30. juli 2008

5. 16.
6. $C_{125} \times C_{31}, C_{25} \times C_5 \times C_{31}, C_5 \times C_5 \times C_5 \times C_{31}$.
7. —
8. 167^{12} .
9. —
10. f er reducibel i $\mathbb{R}[X]$.
11. f er irreducibel i $\mathbb{Q}[X]$.
12. #rødder = 10.
13. 700.
14. 430.
15. $4^6 = 4096$.

Juni 2005

1. $4 \cdot 232 = 928$. Største orden 232.
2. $15 \cdot 6 = 90$. $C(\sigma)$ består af de 8 permutationer $(1\ 2)^i(3\ 4\ 5\ 6)^j$ for $i = 0, 1$ og $j = 0, 1, 2, 3$.
3. —
4. For S_6 er ordenerne: $2^4 = 16, 3^2 = 9$ og 5; for A_6 er de: $2^3 = 8, 3^2 = 9$ og 5.
5. Fx fordi Sylow-401-undergruppen er normal [Kræver begrundelse].
6. Der er fem, nemlig: $C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_{10}, C_2 \times C_2 \times C_{20}, C_4 \times C_{20}, C_2 \times C_{40}, C_{80}$. Alternativ, som produkt af cykliske grupper af primtalsordener: $C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_5, C_2 \times C_2 \times C_4 \times C_5, C_4 \times C_4 \times C_5, C_2 \times C_8 \times C_5, C_{16} \times C_5$. —
7. $(3^9 + 6 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^3 + 9 \cdot 3^5)/18$.
8. Restklasserne modulo 12 af 0, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10. Fx fordi de ikke udgør en undergruppe, da antallet af nuldelere, 8, ikke er divisor i 12 [Eller: da $2 + 3 = 5$ ikke er en nuldele].
9. Restklasserne modulo 9 af 0, 3 og 6. —
10. f er reducibel.
11. f er irreducibel (Eisenstein med $p = 5$).
12. $g = (X + 1)(X^2 - X + 1)(X^2 + X + 1)$ og
 $g = (X + 1)(X - \frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3})(X - \frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3})(X + \frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3})(X + \frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3})$.
13. $g = (X - [2])(X - [3])(X - [4])(X - [5])(X - [6])$.
14. $\{\pm 1\}$.
15. Fx $2 \cdot 7 = (1 + \sqrt{-13})(1 - \sqrt{-13})$.

Juni 2006

1. $16 \cdot 58 = 928$. 464.
2. Normale: $\langle D \rangle$ og undergrupper heri er normale (sammen med $\langle D^2, S \rangle$ og $\langle D^2, DS \rangle$ er det faktisk samtlige ægte normale). Unormal: Fx $\langle S \rangle$.
3. 120. $C(\sigma) = \langle \sigma \rangle$.
4. 1 kommutativ. Ikke-kommutative: Fx $D_{1003}, C_{17} \times D_{59}, C_{59} \times D_{17}$.
5. 5^{24} .

30. juli 2008

6. $14 \cdot 12 = 168$.
7. 8.
8. $d = 1, 2, 4$. $(\mathbb{Z}/16)^* \simeq C_4 \times C_2$. Ja.
9. $\frac{1}{20}(N^{10} + 5N^6 + 6N^5 + 4N^2 + 4N)$ ($= 78$ for $N = 2$).
10. Restklasserne $a = [0], [6], [12]$ og $[18]$.
11. $N(2 + \sqrt{5}) = -1$, enhed; $N(1 + 2\sqrt{5}) = -19$, irreducibel; $N(9 - 4\sqrt{5}) = 1$, enhed; $N(\sqrt{5}) = -5$, irreducibel.
12. $2006 = (-i) \cdot (1 + i)^2 \cdot (4 + i)(4 - i) \cdot 59$.
13. Reducibel.
14. Irreducibel.
15. 1.

Juni 2007

1. $C_9 \times C_{223} = C_{2007}$ og $C_3 \times C_3 \times C_{223}$. 2 og 8.
2. $[(\mathbb{Z}/385)^* = (\mathbb{Z}/5)^* \times (\mathbb{Z}/7)^* \times (\mathbb{Z}/11)^* = C_4 \times C_6 \times C_{10} =] C_2 \times C_2 \times C_4 \times C_3 \times C_5$.
3. -
4. $\{\pm \text{id}\} = \{\text{id}, D^3\}$.
5. På tabelform: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.
6. $2^7, 3^3, 5$.
7. -
8. $\frac{1}{4}(3^{15} + 3^{10} + 3^9 + 3^8)$.
9. - . $a = [\pm 1]$.
10. -
11. 3. Fx 0, 4, 8.
12. $[0], [1], [5], [6]$.
13. Reducibelt (har en rod).
14. Irreducibelt (ingen rødder og grad 2).
15. Reducibelt (da $[5]$ er rod).