Matematik 2AL, vinteren 2002–03

Det er tilladt at skrive med blyant og benytte viskelæder, så længe skriften er læselig, og udviskninger foretages grundigt. Overstregning trækker *ikke* ned og anbefales ved større ændringer.

1. Bestem ordenen af elementet $[\,4\,]_n$ i den multiplikative gruppe $(\mathbb{Z}/n)^*$ for $n \in \{7, 11, 13\}$. Bestem endvidere ordenen af $[\,4\,]_{1001}$ i $(\mathbb{Z}/1001)^*$. $(1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13.)$

2. Bestem cykelfremstilling, orden og fortegn for $\sigma = (12)(123)(1234)(12345) \in \mathrm{S}_5$.

3. Antag, at $\sigma, \tau \in \mathrm{S}_9$ har $|\sigma| = 5$, og $|\tau| = 6$. Afgør, om $|\sigma\tau| = 12$ kan forekomme. Afgør, om $|\sigma\tau| = 30$ kan forekomme.

4. Betragt de additive kvotientgrupper $\mathbb{Z}/123$ og $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Bestem en *injektiv* gruppehomomorfi $\varphi\colon \mathbb{Z}/123 \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

5. Lad $\psi\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ være en gruppehomomorfi. Begrund, at ψ ikke er surjektiv.

6. Bestem i gruppen $G \overset{\text{Def}}{=\!=} D_3 \times D_6$ et element g^*, som ikke er det neutrale element, således at g^* kommuterer med alle elementer, dvs. $g^*g = gg^*$ for alle $\in G$.

7. Bevis, at grupperne $G = D_3 \times D_6$ og $H = A_4 \times D_3$ ikke er isomorfe. (Udnyt resultatet i opgave 6.)

8. Begrund, at gruppen G ikke er simpel, hvis $|G| = 6009$. (2003 er et primtal!)

∗ **9.** Afgør, om $X^{2002} - 2025$ er irreducibelt i $\mathbb{Q}[\,X\,]$.

10. Afgør, om $X^{2002} - 2003$ er irreducibelt i $\mathbb{R}[\,X\,]$.

∗ **11.** Afgør, om $X^{2002} - 2003$ er irreducibelt i $\mathbb{Z}[\,X\,]$.

I de sidste fire opgaver betragtes den kvadratiske talring $\mathbb{Z}[\,\xi\,]$ med $\xi \overset{\text{Def}}{=\!=} -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{-3}}{2}$, som er rod i $X^2 + X + 1 \in \mathbb{Z}[\,X\,]$. Ringen $\mathbb{Z}[\,\xi\,]$ *er* UFD (og dette ønskes ikke uddybet).

∗ **12.** Bestem diskriminanten $\mathrm{D}(\xi)$. Bestem normen $\mathrm{N}(x + y\xi)$, når $x, y \in \mathbb{Z}$.

∗ **13.** Afgør hvilke af elementerne ξ, $1 + \xi$ og $1 - \xi$, der er enheder i $\mathbb{Z}[\,\xi\,]$.

∗ **14.** Afgør hvilke af elementerne $1 - \xi$, 3 og $1 + 3\xi$, der er primelementer i $\mathbb{Z}[\,\xi\,]$.

∗ **15.** Bestem normen $\mathrm{N}(4 + 5\xi)$ samt primopløsningen af $4 + 5\xi$ inden for $\mathbb{Z}[\,\xi\,]$.

Matematik 2AL, sommeren 2003

I besvarelsen må benyttes, at $22176 = 288{\cdot}7{\cdot}11$, at $2002 = 2{\cdot}7{\cdot}11{\cdot}13$, og at 2003 er et primtal.

1. Bestem i gruppen $(\mathbb{Z}/22176)^*$ ordenen af restklassen af 17.

2. Bestem cykeltype, orden og fortegn for permutationen $(1\,2\,3\,4\,5\,6)(1\,7\,6)(1\,8\,9)(1\,0\,7)$; det er en permutation af de 10 cifre $0, 1, \dots, 9$.

3. Bestem den største mulige orden af en permutation i den alternerende gruppe A_9.

4. Bestem de mulige cykeltyper for permutationer af orden 2 i S_6. Hvor mange permutationer σ i S_6 opfylder, at $\sigma^2 = \mathrm{id}$?

5. Betragt 4-cyklen $\gamma = (1\,2\,3\,4)$ i S_4. Findes der en lige permutation σ i S_4 således, at $\sigma\gamma\sigma^{-1} = \gamma^3$? Findes der en ulige permutation σ i S_4 således, at $\sigma\gamma\sigma^{-1} = \gamma^3$? Findes der en permutation σ i S_4 således, at $\sigma\gamma\sigma^{-1} = \gamma^2$?

6. Angiv de kommutative grupper, der har orden 80 og præcis 3 elementer af orden 2.

7. Bestem 4 ikke-kommutative grupper af orden 120, for hvilke antallene af elementer af orden 2 er forskellige.

8. Vis, at en gruppe G af orden $7^3{\cdot}19^3$ ikke kan være simpel.

9. Lad $\varphi\colon \mathrm{C}_{15} \to \mathrm{C}_{10}$ være en ikke-triviel gruppehomomorfi. Vis, at kernen for φ har orden 3, og at billedet for φ har orden 5. Vis, at der findes en sådan homomorfi.

10. Lad p være et ulige primtal. Hvor mange perlekæder med p perler kan der laves, når der er 2 farver perler at vælge mellem?

$*$ **11.** Bestem i Gauss' talring $\mathbb{Z}[i]$ primopløsninger af tallene 2002 og 2003. Angiv for hvert af disse to tal antallet af divisorer.

12. Hver koefficient i polynomiet $f = X^{2002} - 1$ er 0, 1 eller -1, og f kan opfattes som polynomium i $L[X]$ for et vilkårligt legeme L. Hvor mange rødder har polynomiet i L, når (a) $L = \mathbb{R}$, (b) $L = \mathbb{C}$, (c) $L = \mathbb{F}_{2003}$, (d) $L = \mathbb{F}_{29}$?

I de næste tre opgaver betragtes polynomiet $f = X^4 + 67$.

13. Afgør, om f er irreducibel i $\mathbb{R}[X]$.

$*$ **14.** Afgør, om f er irreducibel i $\mathbb{Q}[X]$.

15. Afgør, idet koefficienterne i f identificeres med deres restklasser modulo 2003, om f er irreducibel i $\mathbb{F}_{2003}[X]$. [Vink: $2003 - 67$ er et kvadrattal.]

Matematik 2AL, vinteren 2003–04

I besvarelsen kan det være nyttigt at vide, at $63457 = 31{\cdot}2047$, at $2^{11} = 2048$, at 2003 er et primtal, og at $2002 = 2{\cdot}7{\cdot}11{\cdot}13$.

1. Bestem i gruppen $(\mathbb{Z}/63457)^*$ ordenen af restklassen af 2.

2. Hvor mange elementer i $(\mathbb{Z}/2003)^*$ har orden 13?

3. Idet de 15 tal $0, 1, \dots, 14$ identificeres med deres restklasser modulo 15, bestemmes en permutation af disse tal ved forskriften $x \mapsto 2x \pmod{15}$. Bestem cykelfremstilling, type, orden og fortegn for denne permutation.

4. Angiv cykeltyperne for permutationer af orden 6 i den alternerende gruppe A_{11}.

5. Lad γ være en given permutation i S_n. Vis, at der altid findes permutationer $\sigma \in \mathrm{S}_n$, som opfylder ligningen $\sigma\gamma\sigma^{-1} = \gamma^{-1}$. Vis, at når σ opfylder ligningen, så vil også $\sigma\gamma$ opfylde ligningen. Vis, at når γ er en ulige permutation, så er ligningen altid opfyldt med en lige permutation σ.

6. Angiv de kommutative grupper, der har orden 162 og indeholder præcis 8 elementer af orden 3.

7. Bestem 4 ikke-kommutative grupper af orden 60, for hvilke antallene af elementer af orden 2 er forskellige.

8. Vis, at en gruppe af orden $3^3{\cdot}13$ ikke kan være simpel.

9. Om en gruppe G vides, at $|G| = 60$ og at G er simpel. Bestem antallet af elementer af orden 5 i G.

10. Lad $\varphi\colon \mathrm{S}_4 \to \mathrm{C}_{10}$ være en ikke-triviel gruppehomomorfi. Vis, at billedet for φ har orden 2 og at kernen for φ har orden 12. Vis, at der findes en sådan homomorfi.

11. Hvor mange perlekæder med 9 perler kan der laves, når der er 2 farver perler at vælge mellem?

$*$ **12.** Bestem i Gauss' talring $\mathbb{Z}[i]$ primopløsninger af tallene 5, $5 + i$, $5 + 2i$, og $5 + 3i$.

I de næste tre opgaver betragtes polynomiet $f = X^6 + 2003$.

13. Afgør, om f er irreducibel i $\mathbb{R}[X]$.

$*$ **14.** Afgør, om f er irreducibel i $\mathbb{Q}[X]$.

15. Afgør, idet koefficienterne i f identificeres med deres restklasser modulo 13, om f er irreducibel i $\mathbb{F}_{13}[X]$.

Matematik 2AL, sommeren 2004

Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt ved besvarelsen, og det er tilladt at benytte blyant ved indskrivningen. Opgavesættet består af 15 opgaver, der vægtes ens ved bedømmelsen. I besvarelsen kan det være nyttigt at vide, at $2004 = 2^2{\cdot}3{\cdot}167$, og at 167 er et primtal.

1. Bestem den største orden af et element i gruppen $(\mathbb{Z}/2004)^*$.

2. Idet tallene $0, 1, 2, \dots, 10$ identificeres med deres restklasser modulo 11, bestemmes en permutation af disse tal ved forskriften $x \mapsto x^3{+}3 \pmod{11}$. Bestem cykelfremstilling, type, orden og fortegn for denne permutation.

3. Hvilke permutationer konjugerer $(1\,2)(3\,4\,5)$ over i $(1\,2\,3)(4\,5)$? Hvilke af dem er lige?

4. Gruppen S_n kan opfattes som undergruppen af S_{n+2} bestående af de permutationer, der har $n+1$ og $n+2$ som fikspunkt. Lad $\tau = (n{+}1\; n{+}2)$ være transpositionen, der ombytter $n+1$ og $n+2$. For hver permutation $\sigma \in \mathrm{S}_n$ sættes $\sigma^* = \sigma$, hvis $\sigma \in A_n$, og $\sigma^* = \sigma\tau$ ellers. Vis, at afbildningen $\sigma \mapsto \sigma^*$ er en injektiv homomorfi $\mathrm{S}_n \to \mathrm{A}_{n+2}$.

5. Vis, at gruppen $G = \mathrm{C}_4 \times \mathrm{C}_2 \times \mathrm{C}_3 \times \mathrm{C}_3$ er den eneste kommutative gruppe, der har orden 72 og indeholder 24 elementer af orden 6.

6. Gruppen $(\mathbb{Z}/16)^*$ er isomorf med et produkt af cykliske grupper. Angiv dette produkt.

7. Gruppen S_5 virker på mængden $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, og dermed også på mængden $\mathcal{P}$ af alle delmængder af denne mængde. Bestem under denne virkning af S_5 på $\mathcal{P}$ isotropigruppen for $\{1, 2\}$, og banen gennem $\{1, 2\}$.

8. Vis, at der kun er én gruppe af orden $7 \cdot 11 \cdot 13$.

9. Vis, at hvis σ og τ er disjunkte 5-cykler i S_{15}, så udgør permutationerne af formen $\sigma^i\tau^j$ en undergruppe af orden 25. Vis, at Sylow-5-undergrupperne i S_{15} er isomorfe med $\mathrm{C}_5 \times \mathrm{C}_5 \times \mathrm{C}_5$.

10. Lad m betegne antallet af Sylow-3-undergrupper i en gruppe af orden 60. Bestem de værdier af m, der er mulige ifølge Sylow's sætninger. Giv for hver af disse værdier af m et eksempel på en gruppe af orden 60 med præcis m Sylow-3-undergrupper.

11. Et kvadratisk mosaik-vindue opbygges ved at sammensætte $3 \times 3 = 9$ små farvede glaskvadrater. Hvor mange forskellige vinduer kan der bygges, når midterkvadratet skal være gult og hvert af de øvrige 8 kvadrater skal have en af farverne rød, grøn eller blå.

∗ **12.** Vis, i den kvadratiske talring $\mathbb{Z}[\sqrt{11}]$, at tallet $3-2\sqrt{11}$ er divisor i $53-12\sqrt{11}$. Vis, at tallet $3-2\sqrt{11}$ har en ikke-triviel divisor. [Vink: led blandt tal med norm 5.] Bestem en irreducibel opløsning af $53-12\sqrt{11}$.

I de næste tre opgaver betragtes polynomiet $f = X^4 + 12X^2 + 9$.

13. Afgør, om $f(X)$ er irreducibel i $\mathbb{R}[X]$.

∗ **14.** Afgør, om $f(X)$ er irreducibel i $\mathbb{Q}[X]$. [Vink: kig på polynomiet $f(X+1)$.]

15. For et primtal $p > 3$ identificeres koefficienterne i f med deres restklasser modulo p. Vis, at hvis f i $\mathbb{F}_p$ har roden a, så har f fire rødder i $\mathbb{F}_p$, nemlig $\pm a$ og $\pm 3a^{-1}$.

Inden mundtlig eksamen blev det besluttet, „at 13 helt rigtigt besvarede opgaver regnes for fuld besvarelse; i praksis foregår justeringen ved at de to dårligst besvarede opgaver ikke indgår i vurderingen.“

Matematik 2AL, vinteren 2004–05

Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt ved besvarelsen, og det er tilladt at benytte blyant ved indskrivningen. Opgavesættet består af 15 opgaver, der vægtes ens ved bedømmelsen. I besvarelsen kan det være nyttigt at vide, at $2004 = 2^2 \cdot 3 \cdot 167$, at $2005 = 5 \cdot 401$, og at 167 og 401 er primtal.

1. Hvilken orden har gruppen $(\mathbb{Z}/2005)^*$? Bestem den største orden af et element i denne gruppe.

2. Idet $\sigma := (1\,2\,3\,4)(1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,9)(6\,7\,8\,9)$ ønskes bestemt cykelfremstilling, type, orden og fortegn for σ. Bestem potensen σ^{2004}.

3. Bestem det mindste naturlige tal n således, at A_n indeholder en permutation af orden 2004.

4. Bestem de mulige cykeltyper for de permutationer σ i S_6, som opfylder, at σ^2 har cykeltypen $1^2 2^2$, altså er en dobbelttransposition.

5. Hvor mange permutationer i S_6 kommuterer med dobbelttranspositionen $(1\,2)(3\,4)$?

6. Bestem de kommutative grupper af orden $5^3 \cdot 31$.

7. Vis, at en gruppe af orden $5^3 \cdot 31$ ikke kan være simpel.

8. Hvilken orden har Sylow-167-undergruppen i S_{2004}?

$*$ **9.** Betragt den kvadratiske talring $R = \mathbb{Z}[\sqrt{7}]$. Vis, at tallene $2 \pm \sqrt{7}$ er irreducible og ikke associerede i R. Vis, at tallene $3 \pm \sqrt{7}$ er irreducible og associerede i R.

I de næste tre opgaver betragtes polynomiet $f = X^{2010} + 580$.

10. Afgør, om $f(X)$ er irreducibel i $\mathbb{R}[X]$.

$*$ **11.** Afgør, om $f(X)$ er irreducibel i $\mathbb{Q}[X]$.

12. Idet koefficienterne i f identificeres med deres restklasser modulo 401, kan f opfattes som polynomium i $\mathbb{F}_{401}[X]$. Vis, at restklassen af 2 modulo 401 er rod. Hvor mange rødder har polynomiet i $\mathbb{F}_{401}$? [Vink: Vis, og udnyt, at for alle $a \in \mathbb{F}_{401}^*$ er $a^{2010} = a^{10}$.]

13. Lagkager, bestående af 6 ens stykker, glaceres sådan, at hvert stykke er ensfarvet. Der er glasur af 4 forskellige farver. Hvor mange forskellige lagkager findes der?

14. Hvor mange forskellige perlekæder med 6 glasperler findes der, når der er perler af 4 forskellige farver?

15. På hvor mange måder kan man lægge æbleskiver af 4 forskellige farver i en æbleskivepande, når det midterste af de 7 huller skal være tomt?

Matematik 2AL og Algebra 2, juni 2005

Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt ved besvarelsen, og det er tilladt at benytte blyant ved indskrivningen. Opgavesættet består af 15 opgaver, der vægtes ens ved bedømmelsen. Ved besvarelsen kan det være nyttigt at vide, at $1864 = 8 \cdot 233$, at $2005 = 5 \cdot 401$, og at 233 og 401 er primtal.

1. Hvilken orden har gruppen $(\mathbb{Z}/1864)^*$? Angiv, med begrundelse, den største orden af et element i denne gruppe.

2. Betragt permutationen $\sigma = (1\,2)(3\,4\,5\,6)$ i S_6. Bestem antallet af med σ konjugerede permutationer, og angiv centralisatoren $C(\sigma)$ for σ.

3. Vis, at følgende tre grupper D_{12}, $C_2 \times A_4$ og S_4 er parvis ikke-isomorfe.

4. Angiv ordenerne af Sylow-p-undergrupperne af S_6 og A_6 for de relevante primtal p.

5. Vis, at en gruppe af orden 2005^2 ikke kan være simpel.

6. Bestem alle kommutative grupper af orden 80. Afgør, med begrundelse, om de to grupper $C_2 \times C_{40}$ og $C_2 \times C_2 \times C_{20}$ er isomorfe.

7. Bestem antallet af perlekæder med 9 perler og 3 farver perler. Det er tilstrækkeligt at angive et eksplicit regneudtryk for dette antal.

For en kommutativ ring R kaldes et element $a \in R$ for en *nuldeler*, hvis der findes et element $b \in R$, med $b \neq 0$, så $ab = 0$.

$*$ **8.** Bestem nuldelerne i ringen $\mathbb{Z}/12$, og vis, at de ikke udgør et ideal.

$*$ **9.** Bestem nuldelerne i ringen $\mathbb{Z}/9$. Vis, at hvis nuldelerne i en ring R udgør et ideal i R så er dette ideal et primideal.

I de følgende to opgaver betegner f polynomiet $X^4 + 180$.

10. Afgør, med begrundelse, om f er irreducibel i $\mathbb{R}[X]$.

$*$ **11.** Afgør, med begrundelse, om f er irreducibel i $\mathbb{Q}[X]$.

I de følgende to opgaver betegner g polynomiet $X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$. Det kan uden bevis benyttes, at $(X-1)(X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1) = X^6 - 1$.

12. Skriv g som produkt af irreducible polynomier i $\mathbb{R}[X]$ og $\mathbb{C}[X]$.

13. Skriv g som produkt af irreducible polynomier i $\mathbb{F}_7[X]$, hvor $\mathbb{F}_7$ betegner legemet med 7 elementer.

$*$ **14.** Bestem mængden af enheder i den kvadratiske talring $\mathbb{Z}[\sqrt{-13}]$.

$*$ **15.** Angiv, med begrundelse, to forskellige irreducible opløsninger af et element fra den kvadratiske talring $\mathbb{Z}[\sqrt{-13}]$.

Matematik 2AL og Algebra 2, juni 2006

Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt ved besvarelsen, og det er tilladt at benytte blyant ved indskrivningen. Opgavesættet består af 15 opgaver, der vægtes ens ved bedømmelsen. Ved besvarelsen kan det være nyttigt at kende primopløsningerne $2006 = 2 \cdot 17 \cdot 59$ og $1092 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13$.

1. Hvilken orden har gruppen $(\mathbb{Z}/2006)^*$? Bestem den største orden af et element i denne gruppe.

2. Betragt diedergruppen D_{2006}. Angiv en normal, ikke-triviel undergruppe. Angiv en undergruppe, der ikke er normal.

3. Betragt permutationen $\sigma = (1)(2\,3)(4\,5\,6)$ i gruppen S_6. Bestem antallet af de med σ konjugerede permutationer, og angiv centralisatoren $C(\sigma)$ for σ.

4. Bestem antallet af kommutative grupper af orden 2006. Angiv 2 ikke-kommutative grupper af orden 2006.

5. Angiv ordenen af en Sylow-5-undergruppe i A_{100}.

6. Bestem antallet af elementer af orden 13 i en simpel gruppe af orden 1092.

7. Bestem antallet af undergrupper i den cykliske gruppe C_{2006}.

8. Bestem de tal d, der er orden af et element i $(\mathbb{Z}/16)^*$. Hvilke af grupperne C_8, $\mathrm{C}_4 \times \mathrm{C}_2$ og $\mathrm{C}_2 \times \mathrm{C}_2 \times \mathrm{C}_2$ er isomorfe med $(\mathbb{Z}/16)^*$? Er grupperne $(\mathbb{Z}/16)^*$ og $(\mathbb{Z}/15)^*$ isomorfe?

9. Bestem antallet af perlekæder med 10 perler udvalgt blandt perler af 2 farver. Det er tilstrækkeligt at angive et eksplicit regneudtryk for antallet.

10. Et element a i en kommutativ ring R kaldes *nilpotent*, hvis der findes et naturligt tal n således, at $a^n = 0$. Bestem de nilpotente elementer i $\mathbb{Z}/24$.

∗ **11.** Bestem i den kvadratiske talring $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ normen af de 4 tal $2 + \sqrt{5}$, $1 + 2\sqrt{5}$, $9 - 4\sqrt{5}$ og $\sqrt{5}$. Hvilke af de 4 tal er enheder? Hvilke er irreducible?

∗ **12.** Bestem i den kvadratiske talring $\mathbb{Z}[i]$ primopløsningen af tallet 2006.

I de følgende tre opgaver betragtes polynomiet $f = X^{2007} + 2005$.

13. Øjensynlig har f den reelle rod $a := -\sqrt[2007]{2005}$, så f kan i $\mathbb{R}[X]$ skrives på formen $f = (X - a)g$ med $g \in \mathbb{R}[X]$. Afgør, om g er irreducibel i $\mathbb{R}[X]$.

∗ **14.** Afgør, om f er irreducibel i $\mathbb{Q}[X]$.

15. Afgør, idet f's koefficienter identificeres med deres restklasser modulo 17, hvor mange rødder f har i $\mathbb{F}_{17}$.

Algebra 1, juni 2007

Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt ved besvarelsen, og det er tilladt at benytte blyant ved indskrivningen. Opgavesættet består af 15 opgaver, der vægtes ens ved bedømmelsen. Ved besvarelsen kan det være nyttigt at vide, at $2007 = 3^2 \cdot 223$, og at 223 er et primtal.

1. Angiv samtlige abelske grupper af orden 2007, og bestem for hver af dem antallet af elementer af orden 3.

2. Angiv fremstillingen af $(\mathbb{Z}/385)^*$ som produkt af cykliske grupper af primtalspotens-orden. (Vink: Udnyt, at $385 = 5 \cdot 7 \cdot 11$.)

3. Vis, at grupperne $\mathrm{C}_4 \times \mathrm{C}_6 \times \mathrm{C}_{10}$, C_{240}, D_{120} og $\mathrm{C}_{10} \times \mathrm{S}_4$ er parvis ikke-isomorfe.

4. Bestem centrum i diedergruppen D_6.

5. Bestem samtlige permutationer $\sigma \in \mathrm{S}_5$, sådan at $(1\,2\,3\,4) = \sigma(2\,3\,4\,5)\sigma^{-1}$.

6. Angiv ordenerne af de ikke-trivielle Sylow-p-undergrupper i $\mathrm{C}_2 \times \mathrm{D}_3 \times \mathrm{A}_4 \times \mathrm{S}_5$.

7. Vis, at en gruppe af orden 2007 ikke kan være simpel.

8. Et rektangulært (men ikke kvadratisk) mosaikvindue opbygges ved at sammensætte $3 \times 5 = 15$ lige store, farvede glaskvadrater. Hvor mange forskellige vinduer kan der bygges, når der er 3 farver glas at vælge imellem? Det er nok at angive et eksplicit regneudtryk for antallet.

9. Betragt for hvert element $a \in \mathbb{Z}/6$ afbildningen $f_a : \mathbb{Z}/6 \to \mathbb{Z}/6$ givet ved $f_a(x) = ax$. Vis, at f_a er en gruppehomomorfi. For hvilke $a \in \mathbb{Z}/6$ er f_a en gruppeisomorfi?

10. Lad G være en gruppe, og lad $g \in G$ være et element af endelig orden. Vis, at $|g| = |g^2|$, hvis og kun hvis $|g|$ er ulige.

11. Betragt undergrupperne $12\mathbb{Z}$ og $4\mathbb{Z}$ i den additive gruppe $\mathbb{Z}$. Find indeks af $12\mathbb{Z}$ i $4\mathbb{Z}$. Angiv i $4\mathbb{Z}$ et element fra hver af sideklasserne modulo $12\mathbb{Z}$.

12. Et element a i en ring R kaldes *idempotent*, hvis $a^2 = a$. Bestem de idempotente elementer i ringen $\mathbb{Z}/10$.

13. Afgør, om $X^2 + 2007$ er irreducibel i $\mathbb{C}[X]$.

14. Afgør, om $X^2 + 2007$ er irreducibel i $\mathbb{R}[X]$.

15. Afgør, idet koefficienter identificeres med deres restklasser modulo 11, om $3X^{223} - 1$ er irreducibel i $\mathbb{F}_{11}[X]$. (Vink: Vis, og udnyt, at for alle $a \in \mathbb{F}_{11}^*$ er $a^{223} = a^3$.)

Algebra 1, juni 2008

Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt ved besvarelsen, og det er tilladt at benytte blyant ved indskrivningen. Opgavesættet består af 15 opgaver, der vægtes ens ved bedømmelsen. Ved besvarelsen kan det være nyttigt at vide, at $2008 = 2^3 \cdot 251$, og at 251 er et primtal.

1. En permutation $\sigma \in \mathrm{S}_{15}$ har cykeltypen $4^1 5^1 6^1$. Bestem ordenen af σ. Bestem cykeltype og orden af σ^{2008}.

2. Betragt i S_6 permutationerne $\gamma = (1\,2\,3)(4\,5)(6)$ og $\gamma' = (1)(2\,3)(4\,5\,6)$. Hvor mange permutationer $\sigma \in \mathrm{S}_6$ opfylder, at $\gamma' = \sigma\gamma\sigma^{-1}$? Angiv en sådan permutation σ.

3. Betragt undergrupper af de symmetriske grupper: $H \subseteq \mathrm{S}_n$ og $K \subseteq \mathrm{S}_m$. Gør rede for at $H \times K$ naturligt kan opfattes som en undergruppe af S_{n+m}. Vis, at den symmetriske gruppe S_{255} har en undergruppe af orden 2008.

4. Betragt i den kommutative gruppe $\mathbb{Z}/20$ afbildningen $\varphi \colon \mathbb{Z}/20 \to \mathbb{Z}/20$ bestemt ved $\varphi(x) = 6x$. Vis, at φ er en gruppehomomorfi. Bestem de restklasser modulo 20, der udgør kernen for φ.

5. Angiv samtlige abelske grupper af orden 2008, og bestem for hver af dem antallet af elementer af orden 2.

6. Angiv fremstillingen af $(\mathbb{Z}/2008)^*$ som produkt af cykliske grupper af primtalspotensorden.

7. Vis, at grupperne $\mathrm{C}_6 \times \mathrm{C}_8 \times \mathrm{C}_{10}$, $\mathrm{C}_{12} \times \mathrm{C}_{40}$, $\mathrm{D}_{12} \times \mathrm{C}_{20}$ og $\mathrm{A}_4 \times \mathrm{C}_{40}$ er parvis ikke-isomorfe.

8. Bestem samtlige grupper af ordener 359, 361, 362, og 365.

9. Angiv ordenen af Sylow-251-undergruppen i $\mathrm{C}_{2008} \times \mathrm{D}_{2008} \times \mathrm{A}_{2008}$.

10. Bestem antallet af elementer af orden 7 i en simpel gruppe af orden 168.

11. Et (primitivt) skakbræt produceres ved at male $5 \times 5 = 25$ små kvadrater sorte eller hvide på et kvadratisk træplade. Hvor mange forskellige brætter kan produceres? Det er nok at angive et regneudtryk for antallet.

12. Betragt polynomiet $f = X^k - a \in L[X]$, hvor L er et legeme, $k \geqslant 1$, og $a \neq 0$. Antag, at $\alpha \in L$ er rod i f. Vis, at $\beta \in L$ er rod i f, hvis og kun hvis $\beta\alpha^{-1}$ er rod i $X^k - 1$.

13. Hvor mange komplekse rødder har polynomiet $f = X^{2008} - 5$? Hvor mange af dem er reelle?

I de næste to spørgsmål betragtes polynomiet $f = X^{2008} - 5 \in \mathbb{F}_{251}[X]$, idet koefficienterne identificeres med deres restklasser modulo 251.

14. Vis, at restklassen af 2 modulo 251 er rod i f.

15. Hvor mange rødder har f i $\mathbb{F}_{251}$? [Det må uden bevis benyttes, at i en cyklisk gruppe C af orden n (multiplikativt skrevet, med neutralt element 1) er antallet af løsninger til ligningen $x^k = 1$ med $x \in C$ lig med den største fælles divisor for n, k.]