

Algebra 1

3 timers skriftlig prøve.

Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt ved besvarelsen, og det er tilladt at benytte blyant ved indskrivningen. Opgavesættet består af 15 opgaver, der vægtes ens ved bedømmelsen. Ved besvarelsen kan det være nyttigt at vide, at $2008 = 2^3 \cdot 251$, og at 251 er et primtal.

1. En permutation $\sigma \in S_{15}$ har cykeltypen $4^1 5^1 6^1$. Bestem ordenen af σ . Bestem cykeltype og orden af σ^{2008} .
 2. Betragt i S_6 permutationerne $\gamma = (1\ 2\ 3)(4\ 5)(6)$ og $\gamma' = (1)(2\ 3)(4\ 5\ 6)$. Hvor mange permutationer $\sigma \in S_6$ opfylder, at $\gamma' = \sigma\gamma\sigma^{-1}$? Angiv en sådan permutation.
 3. Betragt undergrupper af de symmetriske grupper: $H \subseteq S_n$ og $K \subseteq S_m$. Gør rede for at $H \times K$ naturligt kan opfattes som en undergruppe af S_{n+m} . Vis, at den symmetriske gruppe S_{255} har en undergruppe af orden 2008.
 4. Betragt i den kommutative gruppe $\mathbb{Z}/20$ afbildningen $\varphi: \mathbb{Z}/20 \rightarrow \mathbb{Z}/20$ bestemt ved $\varphi(x) = 6x$. Vis, at φ er en gruppehomomorfi. Bestem de restklasser modulo 20, der udgør kernen for φ .
 5. Angiv samtlige abelske grupper af orden 2008, og bestem for hver af dem antallet af elementer af orden 2.
 6. Angiv fremstillingen af $(\mathbb{Z}/2008)^*$ som produkt af cykliske grupper af primtalspotensorden.
 7. Vis, at grupperne $C_6 \times C_8 \times C_{10}$, $C_{12} \times C_{40}$, $D_{12} \times C_{20}$ og $A_4 \times C_{40}$ er parvis ikke-isomorfe.
 8. Bestem samtlige grupper af ordener 359, 361, 362, og 365.
 9. Angiv ordenen af Sylow-251-undergruppen i $C_{2008} \times D_{2008} \times A_{2008}$.
 10. Bestem antallet af elementer af orden 7 i en simpel gruppe af orden 168.
 11. Et (primitivt) skakbræt produceres ved at male $5 \times 5 = 25$ små kvadrater sorte eller hvide på et kvadratisk træplade. Hvor mange forskellige brætter kan produceres? Det er nok at angive et regneudtryk for antallet.
 12. Betragt polynomiet $f = X^k - a \in L[X]$, hvor L er et legeme, $k \geq 1$, og $a \neq 0$. Antag, at $\alpha \in L$ er rod i f . Vis, at $\beta \in L$ er rod i f , hvis og kun hvis $\beta\alpha^{-1}$ er rod i $X^k - 1$.
 13. Hvor mange komplekse rødder har polynomiet $f = X^{2008} - 5$? Hvor mange af dem er reelle?
- I de næste to spørgsmål betragtes polynomiet $f = X^{2008} - 5 \in \mathbb{F}_{251}[X]$, idet koefficienterne identificeres med deres restklasser modulo 251.
14. Vis, at restklassen af 2 modulo 251 er rod i f .
 15. Hvor mange rødder har f i \mathbb{F}_{251} ? [Det må uden bevis benyttes, at i en cyklisk gruppe C af orden n (multiplikativt skrevet, med neutralt element 1) er antallet af løsninger til ligningen $x^k = 1$ med $x \in C$ lig med den største fælles divisor for n, k .]