

A. Appendix: Løse ender.

(A.1). I dette appendix giver vi et bevis for Bertrand's Postulat, nævnt i Kapitel 1. Som nævnt følger Postulatet af en tilstrækkelig nøjagtig vurdering af primtalsfunktionen $\pi(x)$. I forbindelse med primtallenes fordeling er der en række andre funktioner, der spiller en vigtig rolle, bl.a. følgende:

$$\vartheta(x) = \sum_{p \leq x} \log p \quad \text{og} \quad \psi(x) = \sum_{p^m \leq x} \log p.$$

Den første sum er over alle primtal $p \leq x$, den anden over alle primtalspotenser $p^m \leq x$. I den første sum er antallet af led lig med $\pi(x)$, og hvert led er højst lig med $\log x$. Altså er $\vartheta(x) \leq \pi(x) \log x$. Vurderinger af $\pi(x)$ medfører altså vurderinger af $\vartheta(x)$, og omvendt. Det er ikke så dybtliggende at vise, at

$$\pi(x) \log x \sim \vartheta(x) \sim \psi(x).$$

Primtalssætningen er altså ækvivalent med enhver af relationerne $\vartheta(x) \sim x$ og $\psi(x) \sim x$. Af vurderingen i Kapitel 1 følger, at $\vartheta(n) \leq 3n$ for alle $n \geq 1$. Den efterfølgende vurdering er lidt bedre; vi vil bruge den i beviset for Bertrand's Postulat.

(A.2) **Sætning.** For alle $n \geq 1$ er $\vartheta(n) \leq (2 \log 2)n$.

Bevis. Beviset, ganske parallelt til beviset for (1.5), forløber ved fuldstændig induktion efter n . Uligheden er trivielt opfyldt for $n = 1$.

Lad der nu være givet en værdi $n > 1$, og antag, at uligheden gælder for alle mindre værdier. Sæt $k := \lfloor (n+1)/2 \rfloor$. Specielt er så $n/2 \leq k \leq (n+1)/2$. Betragt binomialkoefficienten,

$$b := \binom{n}{n-k} = \frac{n(n-1) \cdots (k+1)}{(n-k)(n-k-1) \cdots 2 \cdot 1}.$$

Da $k+1 > n-k$, er faktorerne i tælleren større end faktorerne i nævneren. Specielt kan primtallene blandt faktorerne i tælleren ikke forkortes med faktorer fra nævneren. Derfor er b delelig med produktet af disse primtal, og følgelig er $\log b$ mindst lig med logaritmen til produktet, dvs mindst lig med $\sum \log p$, hvor summen er over primtallene p med $k < p \leq n$. Den sidste sum er øjensynlig lig med $\vartheta(n) - \vartheta(k)$. Altså er

$$\vartheta(n) - \vartheta(k) \leq \log b.$$

Videre er b , som en binomialkoefficient $\binom{n}{i}$ for $n \geq 1$, højst lig med 2^{n-1} . Under brug af induktionsforudsætningen får vi derfor, at

$$\begin{aligned} \vartheta(n) &= \vartheta(n) - \vartheta(k) + \vartheta(k) \leq \log 2^{n-1} + (2 \log 2)k \\ &\leq (n-1) \log 2 + (2 \log 2)(n+1)/2 = (2 \log 2)n, \end{aligned}$$

som ønsket. □

(A.3) Bertand's Postulat. For ethvert $n \geq 1$ findes et primtal p med $n < p \leq 2n$.

Bevis. Uligheden $p \leq 2n$ må naturligvis være skarp, med mindre $n = 1$ og $p = 2$.

Af postulatet fremgår specielt, at hvis p_k er det k 'te primtal, så er $p_{k+1} < 2p_k$. Den sidste påstand er faktisk ækvivalent med Bertrand's postulat. Mere generelt er det let at se, at hvis q_1, q_2, q_3, \dots er en voksende følge af primtal, der opfylder ulighederne $q_{k+1} < 2q_k$ for $k = 1, \dots, l-1$, så gælder Bertrand's Postulat for alle n med $q_1/2 \leq n < q_l$. Øjensynlig er uligheden $q_{k+1} < 2q_k$ opfyldt for det k 'te primtal i følgen,

$$3, 5, 7, 13, 23, 43, 83, 163, 317, 631.$$

Derfor gælder Bertrand's postulat for alle $n < 631$.

Nu vises påstanden med et indirekte bevis. Antag, at der for et naturligt tal n ikke findes primtal p med $n < p \leq 2n$. Specielt er så $n \geq 631$. Betragt binomialkoefficienten,

$$b = \binom{2n}{n} = \frac{(2n)(2n-1)\cdots(n+1)}{n(n-1)\cdots 2 \cdot 1}.$$

Lad p være en primdivisor i b , og lad p^{v_p} være den potens, der indgår i primopløsningen af b . Af antagelsen følger, at ingen af faktorerne i tælleren er primtal. Derfor er $p \leq n$. Yderligere er $p \leq \frac{2}{3}n$. Et primtal q med $\frac{2}{3}n < q \leq n$ forekommer nemlig én gang blandt faktorerne i nævneren, og i tælleren går q kun op i faktoren $2q$. De to forekomster af q forkortes mod hinanden; derfor er b ikke delelig med q .

Altså er $p \leq \frac{2}{3}n$ for enhver primfaktor p i b . Af (A.2) følger derfor:

$$\sum_{p|b} \log p \leq \sum_{p \leq \frac{2}{3}n} \log p = \vartheta\left(\frac{2}{3}n\right) \leq \left(\frac{4}{3} \log 2\right)n. \tag{A.3.1}$$

Da $p^{v_p} | b$, følger det af (1.6), at $p^{v_p} \leq 2n$. Hvis $v_p \geq 2$, så er $p^2 \leq 2n$, og derfor er $p \leq \sqrt{2n}$; specielt er der højst $\sqrt{2n}$ primdivisorer p i b med $v_p \geq 2$, og for hver af dem er $v_p \log p \leq \log(2n)$. Derfor får vi vurderingen,

$$\sum_{p|b, v_p \geq 2} v_p \log p < \sqrt{2n} \log(2n).$$

Af denne vurdering og (A.3.1) fås:

$$\log b = \sum_{p|b, v_p=1} \log p + \sum_{p|b, v_p \geq 2} v_p \log p < \left(\frac{4}{3} \log 2\right)n + \sqrt{2n} \log(2n). \tag{A.3.2}$$

På den anden side giver binomialformlen:

$$2^{2n} = 2 + \binom{2n}{1} + \binom{2n}{2} + \cdots + \binom{2n}{2n-1},$$

hvor de to yderste binomialkoefficienter er slået sammen til $1 + 1 = 2$. Der er $2n$ led på højresiden, og b er det største. Derfor er $2^{2n} \leq (2n)b$, og altså

$$(2 \log 2)n \leq \log(2n) + \log b. \tag{A.3.3}$$

Af (A.3.2) og (A.3.3) følger:

$$(2 \log 2)n - \log(2n) \leq \log b < \left(\frac{4}{3} \log 2\right)n + \sqrt{2n} \log(2n). \tag{A.3.4}$$

Den opnåede ulighed kan omskrives til $\left(\frac{2}{3} \log 2\right)n \leq (1 + \sqrt{2n}) \log(2n)$, eller

$$\frac{1}{3} \log 2 \leq \frac{1 + \sqrt{2n}}{\sqrt{2n}} \frac{\log(2n)}{\sqrt{2n}}. \tag{A.3.5}$$

De to brøker på højresiden er aftagende som funktioner af n (den sidste for $2n \geq e^2$). Værdien på højresiden, for $n \geq 631$, er derfor mindre end værdien for $n = 512 = 2^9$. Altså er

$$\frac{1}{3} \log 2 < \frac{1 + 2^5}{2^5} \frac{10 \log 2}{2^5} = \frac{330}{1024} \log 2.$$

Men den ulighed er øjensynlig gal. Hermed er den søgte modstrid opnået, hvormed Bertrand's Postulat er bevist. □

(A.4) Sætning. For alle naturlige tal $n \geq 7$ er $(\log 2)n \leq \psi(n)$. Ækvivalent, hvis $\text{LCM}(n)$ betegner det mindste fælles multiplum af alle tallene $1, 2, \dots, n$, så er

$$2^n \leq \text{LCM}(n) \quad \text{for } n \geq 7. \tag{A.4.1}$$

Bevis. (Efter [Nair].) Det mindste fælles multiplum $\text{LCM}(n)$ er øjensynlig lig med produktet af primtalspotenserne $p^k \leq n$ med, for hvert primtal p , den størst mulige eksponent k . Alternativt er $\text{LCM}(n)$ lig med produktet af primfaktorer p , hvor hver faktor p medtages én gang for hver potens p^m med $p^m \leq n$. Med den alternative beskrivelse er det klart, at $\log \text{LCM}(n) = \psi(n)$. Derfor er de to anførte uligheder ækvivalente.

Beviset for den sidste ulighed tager udgangspunkt i følgende formel, for $1 \leq k \leq n$:

$$\sum_{r=0}^{n-k} (-1)^r \binom{n-k}{r} \frac{1}{r+k} = \frac{1}{k \binom{n}{k}}.$$

For at vise formlen bemærkes, at begge formlens sider er lig med det bestemte integral $I := \int_0^1 x^{k-1} (1-x)^{n-k} dx$: At integralet er lig med venstresiden fås ved at anvende binomialformlen på faktoren $(1-x)^{n-k}$ og så integrere de fremkomne potenser x^i . At integralet er lig med højresiden ses ved gentagne partielle integrationer: integrer potensen x^i og differentier potensen $(1-x)^j$.

For at vise den anførte ulighed bemærkes, at alle nævnerne $r + k$ på venstresiden er mindre end eller lig med n . Derfor er alle nævnerne $r + k$ divisorer i $\text{LCM}(n)$. Multipliseres med $\text{LCM}(n)$, fås altså et helt tal ud fra venstresiden, og derfor også ud fra højresiden. Det sidste betyder, at nævneren på højresiden er divisor i $\text{LCM}(n)$, altså

$$k \binom{n}{k} \mid \text{LCM}(n). \quad (\text{A.4.2})$$

Relationen (A.4.2) medfører følgende to relationer, for $k \geq 1$:

$$k \binom{2k}{k} \mid \text{LCM}(2k + 1) \quad \text{og} \quad (2k + 1) \binom{2k}{k} \mid \text{LCM}(2k + 1). \quad (\text{A.4.3})$$

Den første relation i (A.4.3) fås nemlig ved at anvende (A.4.2) med $n := 2k$ og udnytte, at $\text{LCM}(2k) \mid \text{LCM}(2k + 1)$. Den anden relation i (A.4.3) fås ved at anvende (A.4.2) med $n := 2k + 1$ og $k := k + 1$; udnyt, at $(k + 1) \binom{2k+1}{k+1} = (2k + 1) \binom{2k}{k}$.

I de to relationer i (A.4.3) er de to faktorer k og $2k + 1$ primiske. De to relationer medfører derfor følgende:

$$k(2k + 1) \binom{2k}{k} \mid \text{LCM}(2k + 1). \quad (\text{A.4.4})$$

Øjensynlig er $2^{2k} = \sum_i \binom{2k}{i}$. I summen er der $2k + 1$ binomialkoefficienter $\binom{2k}{i}$ for $i = 0, \dots, 2k$, og af dem er $\binom{2k}{k}$ den største. Derfor er $2^{2k} \leq (2k + 1) \binom{2k}{k}$. Relationen i (A.4.4) medfører derfor uligheden,

$$k2^{2k} \leq \text{LCM}(2k + 1). \quad (\text{A.4.5})$$

Heraf ses, for $k \geq 2$, at $2^{2k+1} \leq \text{LCM}(2k + 1)$; uligheden (A.4.1) gælder derfor, når n er ulige og $n \geq 5$. Videre er $\text{LCM}(2k + 1) \leq \text{LCM}(2k + 2)$, så af (A.4.5) følger, for $k \geq 4$, at $2^{2k+2} \leq \text{LCM}(2k + 2)$; uligheden (A.4.1) gælder derfor, når n er lige og $n \geq 10$. I området $n \geq 7$ mangler altså kun uligheden for $n = 8$. Her finder vi:

$$2^8 = 2^3 \cdot 2 \cdot 2^2 \cdot 2^2 \leq 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = \text{LCM}(8),$$

hvormed også den manglende ulighed er eftervist. □

(A.5) Opgaver.

1. Vis, at $\psi(x) = \sum_{p \leq x} \lfloor \log x / \log p \rfloor \log p$, og at $\psi(x) \leq \pi(x) \log x$.
2. Gælder uligheden $2^n \leq \text{LCM}(n)$ for $n = 6$? Vis, at uligheden $\pi(n) \geq (\log 2)n / \log n$ gælder for naturlige tal $n \geq 4$.
3. Brug Lemma (1.6) til at vise, at enhver binomialkoefficient $\binom{n}{k}$ er divisor i $\text{LCM}(n)$, og giv herved et simpelt bevis for (den svagere ulighed) $2^n \leq (n + 1) \text{LCM}(n)$.

4. Vis følgende skærpede form af Bertrand's postulat: For alle $n \geq 4$ findes et primtal p med $n < p < 2n - 2$. [Vink: Kig på beviset i (A.3). For at vise den skærpede form for „små“ værdier af n kræves en følge q_i af primtal med $q_{i+1} < 2q_i - 2$. En sådan følge er

$$5, 7, 11, 19, 31, 59, 113, 223, 443, 883.$$

Det fremgår, at den skærpede form gælder for $n < 882$. I et modeksempel må der altså gælde $n \geq 882$, og specielt, at $n \geq 2^9$.

Kig nu på de følgende argumenter i beviset for (A.3). De fleste er uændrede, men i tælleren på b kan det forekomme, at $n + 1$ er et primtal. Det medfører, at man til højresiden i (A.3.1) må lægge leddet $\log(n + 1)$. Det samme led skal herefter lægges til på højresiden i (A.3.2) og (A.3.4), og til højresiden i (A.3.5) må man lægge brøken $(\log(n + 1))/(2n)$. Også den sidste brøk er aftagende som funktion af n . Vurder den opad ved værdien i 2^9 , som kan vurderes videre: $(\log(2^9 + 1))/2^{10} < (\log 2^{10})/2^{10} = (10/1024) \log 2$. Med dette ekstra bidrag fås den afsluttende ulighed $\frac{1}{3} \log 2 < \frac{340}{1024} \log 2$; og det er stadig er en modstrid.]