

Algebra 1.

3 timers skriftlig prøve.

Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt ved besvarelsen, og det er tilladt at benytte blyant ved indskrivningen. Opgavesættet består af 15 opgaver, der vægtes ens ved bedømmelsen. Ved besvarelsen kan det være nyttigt at vide, at $2007 = 3^2 \cdot 223$, og at 223 er et primtal.

1. Angiv samtlige abelske grupper af orden 2007, og bestem for hver af dem antallet af elementer af orden 3.
2. Angiv fremstillingen af $(\mathbb{Z}/385)^*$ som produkt af cykliske grupper af primtalspotensorden. (Vink: Udnyt, at $385 = 5 \cdot 7 \cdot 11$.)
3. Vis, at grupperne $C_4 \times C_6 \times C_{10}$, C_{240} , D_{120} og $C_{10} \times S_4$ er parvis ikke-isomorfe.
4. Bestem centrum i diedergruppen D_6 .
5. Bestem samtlige permutationer $\sigma \in S_5$, sådan at $(1\ 2\ 3\ 4) = \sigma(2\ 3\ 4\ 5)\sigma^{-1}$.
6. Angiv ordenerne af de ikke-trivielle Sylow- p -undergrupper i $C_2 \times D_3 \times A_4 \times S_5$.
7. Vis, at en gruppe af orden 2007 ikke kan være simpel.
8. Et rektangulært (men ikke kvadratisk) mosaikvindue opbygges ved at sammensætte $3 \times 5 = 15$ lige store, farvede glaskvadrater. Hvor mange forskellige vinduer kan der bygges, når der er 3 farver glas at vælge imellem? Det er nok at angive et eksplicit regneudtryk for antallet.
9. Betragt for hvert element $a \in \mathbb{Z}/6$ afbildningen $f_a: \mathbb{Z}/6 \rightarrow \mathbb{Z}/6$ givet ved $f_a(x) = ax$. Vis, at f_a er en gruppehomomorfi. For hvilke $a \in \mathbb{Z}/6$ er f_a en gruppeisomorfi?
10. Lad G være en gruppe, og lad $g \in G$ være et element af endelig orden. Vis, at $|g| = |g^2|$, hvis og kun hvis $|g|$ er ulige.
11. Betragt undergrupperne $12\mathbb{Z}$ og $4\mathbb{Z}$ i den additive gruppe \mathbb{Z} . Find indeks af $12\mathbb{Z}$ i $4\mathbb{Z}$. Angiv i $4\mathbb{Z}$ et element fra hver af sideklasserne modulo $12\mathbb{Z}$.
12. Et element a i en ring R kaldes *idempotent*, hvis $a^2 = a$. Bestem de idempotente elementer i ringen $\mathbb{Z}/10$.
13. Afgør, om $X^2 + 2007$ er irreducibel i $\mathbb{C}[X]$.
14. Afgør, om $X^2 + 2007$ er irreducibel i $\mathbb{R}[X]$.
15. Afgør, idet koefficienter identificeres med deres restklasser modulo 11, om $3X^{223} - 1$ er irreducibel i $\mathbb{F}_{11}[X]$. (Vink: Vis, og udnyt, at for alle $a \in \mathbb{F}_{11}^*$ er $a^{223} = a^3$.)