Matematik 2AL (Ny ordning), sommeren 1996

1. Angiv 3 ikke-isomorfe grupper af orden 260.

2. Gør rede for, at diedergruppen D_6 ikke er isomorf med en undergruppe af den symmetriske gruppe S_4.

I de næste tre spørgsmål betragtes polynomiet $f(x) = x^3 + 3x^2 + 6x + 24$.

3. Afgør, om $f(x)$ er irreducibel som polynomium i ringen $\mathbb{R}[x]$.

4. Afgør, om $f(x)$ er irreducibel som polynomium i ringen $\mathbb{Q}[x]$.

5. Afgør, om $f(x)$ er irreducibel som polynomium i ringen $\mathbb{Z}_5[x]$, hvor $\mathbb{Z}_5$ er restklasseringen modulo 5 og koefficienterne i $f(x)$ fortolkes som restklasser i $\mathbb{Z}_5$.

I de næste 5 spørgsmål betragtes den symmetriske gruppe S_6. En permutation kaldes en *dobbelttransposition*, hvis den er et produkt af 2 disjunkte transpositioner. Med σ og τ betegnes følgende to cykler i S_6:

$$\sigma = (2\,3\,4\,5\,6) \qquad \text{og} \qquad \tau = (1\,2\,3).$$

6. Udregn produkterne $\sigma\tau$ og $\tau\sigma$, og angiv ordenerne af disse to permutationer.

7. Vis ved et eksempel, at et produkt af to 3-cykler kan være en dobbelttransposition.

8. Bestem antallet af dobbelttranspositioner i S_6.

9. Gør rede for, at den mindste normale undergruppe af S_6 som indeholder τ er den alternerende gruppe A_6.

10. Bestem antallet af permutationer i S_6 som er konjugerede med σ. Angiv dernæst samtlige permutationer μ i centralisatoren for σ, dvs de permutationer μ i S_6, for hvilke $\mu\sigma = \sigma\mu$.

11. Vis, at en gruppe af orden 260 ikke kan være simpel.

12. Skriv tallet 50 som et produkt af irreducible elementer i Gauss' talring $\mathbb{Z}[i]$.

13. Hvor mange forskellige perlekæder med 7 perler kan der laves, når der er tre farver perler at vælge imellem?

I de sidste 2 spørgsmål betragtes polynomierne $f(x) = x^5 + x^3 + 1$ og $g(x) = x^2 + x + 1$ i ringen $\mathbb{Z}_2[x]$.

14. Bestem resten af $f(x)$ ved division med $g(x)$, dvs angiv det polynomium $r(x)$ af grad mindre end 2, som indgår i en fremstilling $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$ i $\mathbb{Z}_2[x]$.

15. Polynomiet $g(x)$ er det eneste irreducible andengradspolynomium i $\mathbb{Z}_2[x]$ [Dette kræves ikke bevist]. Vis, at polynomiet $f(x)$ er irreducibelt i $\mathbb{Z}_2[x]$.

Matematik 2AL (Ny ordning), vinteren 1996-97

1. Angiv 4 ikke-isomorfe grupper af orden 140.

2. Vis, at diedergruppen D_4 indeholder to ikke-isomorfe undergrupper af orden 4.

I de næste tre spørgsmål betragtes polynomiet $f(x) = x^3 + 12x^2 + 18$.

3. Afgør, om $f(x)$ er irreducibel som polynomium i ringen $\mathbb{R}[x]$.

4. Afgør, om $f(x)$ er irreducibel som polynomium i ringen $\mathbb{Q}[x]$.

5. Afgør, om $f(x)$ er irreducibel som polynomium i ringen $\mathbb{Z}_5[x]$, hvor $\mathbb{Z}_5$ er restklasseringen modulo 5 og koefficienterne i $f(x)$ fortolkes som restklasser i $\mathbb{Z}_5$.

I de næste 5 spørgsmål betragtes den symmetriske gruppe S_7. En permutation kaldes en *dobbelttransposition*, hvis den er et produkt af 2 disjunkte transpositioner. Med σ og τ betegnes følgende to cykler i S_7:

$$\sigma = (1\,2\,3\,4\,5\,6) \qquad \text{og} \qquad \tau = (5\,6\,7).$$

6. Udregn produkterne $\sigma\tau$ og $\tau\sigma$, og angiv ordenerne af disse to permutationer.

7. Vis, at enhver permutation $\mu \neq \text{id}$ i A_7, som opfylder $\mu^2 = \text{id}$, er en dobbelttransposition.

8. Bestem antallet af dobbelttranspositioner i S_7.

9. Hvilke af tallene $1, 2, \ldots, 15$ er ikke orden af et element i S_7?

10. Bestem antallet af permutationer i S_7 som er konjugerede med σ. Angiv dernæst samtlige permutationer μ i centralisatoren for σ, dvs de permutationer μ i S_7, for hvilke $\mu\sigma = \sigma\mu$.

11. Vis, at en gruppe af orden 140 ikke kan være simpel.

12. Hvilke af tallene $1+i$, $1+2i$, $1+3i$, $1+4i$, og $1+5i$ er irreducible i Gauss' talring $\mathbb{Z}[i]$. Angiv primopløsninger i $\mathbb{Z}[i]$ for de reducible af tallene.

13. Hvor mange forskellige perlekæder med 6 perler kan der laves, når der er tre farver perler at vælge imellem?

14. Betragt polynomiet $g(x) = x^2 + x + 1$ i ringen $\mathbb{Z}_2[x]$. Vis, at $g(x)$ er et irreducibelt polynomium, og vis, at $g(x)$ er det eneste irreducible polynomium af grad 2.

15. Angiv samtlige irreducible polynomier af grad 4 i $\mathbb{Z}_2[x]$.

Matematik 2AL, sommeren 1997

1. Permutationen σ i S_6 er et produkt af fire 3-cykler,

$$\sigma = (4\,5\,6)(3\,4\,5)(2\,3\,4)(1\,2\,3).$$

Bestem fortegnet for σ. Angiv fremstillingen af σ som produkt af disjunkte cykler.

2. En permutation μ i S_{10} har typen $4^1 6^1$. Hvilken type har μ^3?

3. Vis, at hvis en kommutativ gruppe af orden 120 har præcis ét element af orden 2, så er gruppen cyklisk.

4. For en endelig gruppe G og $n \in \mathbb{N}$ betegnes med $\alpha_n(G)$ antallet af elementer i G, hvis orden er divisor i n. Vis, at hvis G er et direkte produkt, $G = G_1 \times G_2$, så er $\alpha_n(G) = \alpha_n(G_1)\alpha_n(G_2)$.

5. Angiv antallet af elementer af orden 2 i hver af følgende grupper: C_{60}, A_5, $A_4 \times C_5$, D_{30}, $D_3 \times D_5$.

6. Vis, at den cykliske gruppe C_4 er isomorf med en undergruppe af diedergruppen D_n, hvis og kun hvis n er delelig med 4.

7. Produktmængden $X := \{0, 1\}^4$ af 4-sæt (x_1, x_2, x_3, x_4) med $x_i \in \{0, 1\}$ kan opfattes som mængden af afbildninger $\{1, 2, 3, 4\} \to \{0, 1\}$. Følgelig virker S_4 på X. Beskriv isotropigrupperne for denne virkning.

8. Et kvadratisk mosaik-vindue opbygges ved at sammensætte $4 \times 4 = 16$ små farvede glaskvadrater. Hvor mange forskellige vinduer kan der bygges, når der er 3 farver glas at vælge imellem? Det er nok at opstille et regneudtryk for antallet.

9. Lad S_1 og S_2 være grupper af orden 2^ν og lad H_1 og H_2 være grupper af ulige orden. Vis, at hvis $S_1 \times H_1$ og $S_2 \times H_2$ er isomorfe, så er S_1 og S_2 isomorfe.

10. Vis, at en gruppe af orden 880 ikke kan være simpel.

11. Bestem, i polynomiumsringen $\mathbb{F}_3[X]$, antallet af irreducible polynomier af grad 2.

I de næste tre spørgsmål betragtes polynomiet $f = X^5 + 21X + 63$.

12. Afgør, om f er irreducibel som polynomium i ringen $\mathbb{R}[X]$.

13. Afgør, om f er irreducibel som polynomium i ringen $\mathbb{Q}[X]$.

14. Afgør, om f er irreducibel som polynomium i ringen $\mathbb{F}_2[X]$, hvor $\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2$ og koefficienterne i f fortolkes som restklasser modulo 2.

15. Angiv, i Gauss' talring $\mathbb{Z}[i]$, primopløsningen af tallet $11 + 2i$.

Matematik 2AL, vinteren 1997–98

1. Bestem et helt tal a således, at $a \equiv 5 \pmod 8$ og $a \equiv 2 \pmod 9$. Hvilken orden, i gruppen $(\mathbb{Z}/72)^*$, har restklassen af a modulo 72?

2. I den symmetriske gruppe S_9 betragtes permutationen,

$$\sigma = \big((1\,2\,3\,4\,5)(5\,6\,7\,8\,9)\big)^3.$$

Bestem fortegnet for σ. Angiv typen af σ.

3. Angiv i gruppen A_7 et element af hver af de forekommende ordener.

4. Hvor mange permutationer i S_8 har typen $2^1 3^2$?

5. Vis, at følgende grupper parvis er ikke-isomorfe: C_{12}, $C_6 \times C_2$, A_4, $D_3 \times C_2$.

6. Vis, at Klein's Vier-gruppe V er isomorf med en undergruppe af diedergruppen D_n, hvis og kun hvis n er lige.

7. Vis, at hvis en kommutativ gruppe af orden 120 har et element af orden 24, så er gruppen cyklisk.

8. Talrummet $\mathbb{R}^4$ kan opfattes som mængden af afbildninger $\{1, 2, 3, 4\} \to \mathbb{R}$. Følgelig virker S_4 på $\mathbb{R}^4$. Bestem isotropigruppen for vektoren $(1, 1, 0, 0)$. Angiv en vektor, hvis isotropigruppe har orden 2.

9. Vis, at en gruppe af orden $5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 17$ ikke kan være simpel.

10. Et kvadratisk mosaik-vindue opbygges ved at sammensætte $5 \times 5 = 25$ små farvede glaskvadrater. Hvor mange forskellige vinduer kan der bygges, når der er 3 farver glas at vælge imellem? Det er nok at opstille et regneudtryk for antallet.

11. Vis, at netop ét af polynomierne $X^{12} - 8$, $X^{12} - 9$ og $X^{12} - 10$ er irreducibelt i $\mathbb{Q}[X]$.

12. Angiv i $\mathbb{F}_2[X]$ et polynomium, som er reducibelt og uden rødder i $\mathbb{F}_2$.

13. Bestem i polynomiumsringen $\mathbb{F}_5[X]$ antallet af normerede irreducible polynomier af grad 2.

14. Afgør, i den kvadratiske talring $\mathbb{Z}[\sqrt{-7}]$, hvilke af tallene $1 \pm 6\sqrt{-7}$, der har $2 + \sqrt{-7}$ som divisor. Hvilke divisorer har $2 + \sqrt{-7}$?

15. For hvilke tal $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ har ligningen $x^2 + y^2 = n!$ heltalsløsninger (x, y)?

Matematik 2AL, sommeren 1998

1. Bestem et helt tal a således, at $a \equiv 1 \pmod 4$, $a \equiv 2 \pmod 5$ og $a \equiv 5 \pmod 9$. Hvilken orden, i gruppen $(\mathbb{Z}/180)^*$, har restklassen af a modulo 180.

2. Om en gruppe G vides, at afbildningen $x \mapsto x^2$ er en homomorfi $G \to G$. Vis, at G er abelsk.

3. Vis, at der ved $x \mapsto 3x + 5$ defineres en permutation af mængden $\mathbb{Z}/10$. Angiv, idet tallene $0, 1, \dots, 9$ identificeres med deres restklasser modulo 10, cykelfremstillingen af denne permutation. Bestem permutationens orden og fortegn.

4. Bestem for den symmetriske gruppe S_6 antallet af elementer af orden 6.

5. Bestem det mindste naturlige tal n for hvilket A_n indeholder et element af orden 30.

6. Lad G være en gruppe af orden 60, og lad $a(G)$ betegne antallet af elementer i G af orden 5. Vis, at $a(G)$ er 4 eller 24, og vis, at begge muligheder kan forekomme.

7. Gør rede for, at en gruppe af orden $992 = 31 \cdot 32$ ikke kan være simpel.

8. En gruppe af orden 120 indeholder 8 elementer af orden 6. Vis, at gruppen ikke er kommutativ.

9. Hvor mange perlekæder med 8 perler kan der laves, når der er to farver perler at vælge imellem.

10. Hvor mange karusseller med 8 heste kan der laves, når der er to farver (træ-)heste at vælge imellem.

11. Lad L være et legeme med 2^ν elementer. Vis, at L har karakteristik 2, og beskriv strukturen af L's additive gruppe.

I de næste tre spørgsmål betragtes polynomiet $f = X^{16} + 12$.

12. Afgør, om f er irreducibel som polynomium i ringen $\mathbb{R}[X]$.

13. Afgør, om f er irreducibel som polynomium i ringen $\mathbb{Q}[X]$.

14. Afgør, idet koefficienterne i f identificeres med deres restklasser modulo 17, om f har en rod i $\mathbb{F}_{17}$.

15. Hvor mange elementer i Gauss's talring $\mathbb{Z}[i]$ er divisorer i 150.

Matematik 2AL, vinteren 1998–99

1. Bestem et helt tal a således, at $a \equiv 3 \pmod 4$ og $a \equiv 6 \pmod{25}$. Hvilken orden, i gruppen $(\mathbb{Z}/100)^*$, har restklassen af a modulo 100.

2. Lad G være en endelig kommutativ gruppe. Vis, at afbildningen $x \mapsto x^2$, af G ind i G, er bijektiv, hvis og kun hvis G er af ulige orden.

3. Vis, at der ved $x \mapsto 7x + 2$ defineres en permutation af mængden $\mathbb{Z}/10$. Angiv, idet tallene $0, 1, \dots, 9$ identificeres med deres restklasser modulo 10, cykelfremstillingen af denne permutation. Bestem permutationens orden og fortegn.

4. Bestem for den symmetriske gruppe A_8 antallet af elementer af orden 2.

5. Bestem det mindste naturlige tal n for hvilket A_n indeholder et element af orden 1998. [Vink: $1998 = 2 \cdot 3^3 \cdot 37$.]

6. Lad G være en gruppe af orden 120. Vis, at antallet af elementer i G af orden 5 er enten 4 eller 24, og vis, at begge muligheder kan forekomme.

7. Antag, at tallet $2^\nu - 1$ er et primtal. Gør rede for, at en gruppe af orden $2^\nu(2^\nu - 1)$ ikke kan være simpel.

8. Bestem en værdi af n således, at der er præcis 6 kommutative grupper af orden n.

9. Hvor mange karusseller med 10 heste kan der laves, når der er to farver (træ-)heste at vælge imellem.

10. Lad L være et legeme med 27 elementer. Vis, at L har karakteristik 3 og at L's additive gruppe er isomorf med $\mathbb{Z}/3 \times \mathbb{Z}/3 \times \mathbb{Z}/3$.

I de næste tre spørgsmål betragtes polynomiet $f = X^4 + 100X^3 + 100X + 50$.

11. Afgør, om f er irreducibel som polynomium i ringen $\mathbb{R}[X]$.

12. Afgør, om f er irreducibel som polynomium i ringen $\mathbb{Q}[X]$.

13. Vis, idet koefficienterne i f identificeres med deres restklasser modulo 3, at i $\mathbb{F}_3[X]$ er $X^2 + 1$ divisor i f.

14. Vis, at tallet $16 + 15i$ har en norm, der er delelig med 13. Angiv, i Gauss's talring $\mathbb{Z}[i]$, en primopløsning af $16 + 15i$.

15. Hvor mange elementer i Gauss's talring $\mathbb{Z}[i]$ er divisorer i 1998.

Matematik 2AL, sommeren 1999

1. Bestem i gruppen $(\mathbb{Z}/385)^*$ ordenen af restklassen af 2.

2. Bestem potensen σ^{1999} af permutationen $\sigma = (1\,2)(7\,6)(2\,3)(5\,6)(3\,4)$ i S_7.

3. Vis, at der ved $x \mapsto x^3 + 3$ defineres en permutation af mængden $\mathbb{Z}/10$. Angiv, idet tallene $0, 1, \ldots, 9$ identificeres med deres restklasser modulo 10, cykelfremstillingen af denne permutation. Bestem permutationens type, orden og fortegn.

4. Vis, at der findes en undergruppe af orden 15 i S_8. Findes der en undergruppe af orden 15 i S_7?

5. Bestem antallet af permutationer af type 2^3 i S_7 og i A_8.

6. Lad d være en ulige divisor i n. Vis, at diedergruppen D_n har præcis én undergruppe af orden d.

7. Betragt i en gruppe G to forskellige elementer a og b af orden 2. Vis, at ab har orden 2, hvis og kun hvis a og b kommuterer.

8. Lad p være et primtal. Bestem antallet af ikke-trivielle undergrupper af gruppen $\mathrm{C}_p \times \mathrm{C}_p$.

9. Vis, at Sylow-3-undergrupperne i S_6 er isomorfe med $\mathrm{C}_3 \times \mathrm{C}_3$.

10. Overfladen på badebolde, af perfekt kugleform, er delt i 10 lige store områder via en ækvator og 5 længdekredse (som på en globus), der deler ækvator i 5 lige store dele. Hvert område kan være farvet rødt eller hvidt. Hvor mange badebolde findes der?

I de næste fire opgaver betragtes polynomiet $f = X^4 + 1$.

11. Vis, at enhedsroden $\zeta = e^{2\pi i/8} = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{i}{2}\sqrt{2}$ er rod i f.

12. Afgør, om f er irreducibel som polynomium i ringen $\mathbb{R}[X]$.

13. Afgør, om f er irreducibel som polynomium i ringen $\mathbb{Q}[X]$.

14. Bestem, idet koefficienterne i f identificeres med deres restklasser modulo 5, primopløsningen af f i $\mathbb{F}_5[X]$.

15. Vis, at normen af tallet $12 + 5\sqrt{-7}$ er delelig med 11. Bestem i talringen $\mathbb{Z}[\sqrt{-7}]$ en irreducibel opløsning af $12 + 5\sqrt{-7}$.

Matematik 2AL, vinteren 1999–2000

NB. Det kræves ikke godtgjort i besvarelsen, at 1999 er et primtal.

1. Vis, at restklassen af 2 modulo 1999 er invertibel, og angiv den inverse restklasse.

2. Bestem i gruppen $(\mathbb{Z}/495)^*$ ordenen af restklassen af 2.

3. Vis, at for hvert helt tal a har kongruensen $x^3 \equiv a \pmod{10}$ en, og modulo 10 kun én, løsning x.

4. Angiv, idet $\sigma = (1\,2)(7\,6)(2\,3)(5\,6)(3\,4)$ i S_7, orden, cykeltype og fortegn for permutationen σ^{2000}.

5. Bestem det mindste naturlige tal n for hvilket den alternerende gruppe A_n indeholder et element af orden 2000.

6. Vis, at hvis den symmetriske gruppe S_n indeholder en undergruppe af orden 2000, så er $n \geqslant 15$. Vis, at S_{23} indeholder en kommutativ undergruppe af orden 2000.

7. Hvilken orden har Sylow-1999-undergruppen i S_{2000}.

8. For hvilke værdier af n indeholder diedergruppen D_n en undergruppe af orden 2000.

9. Lad H være en undergruppe af den symmetriske gruppe S_n. Vis, at enten er $H \subseteq \mathrm{A}_n$ eller også indeholder H det samme antal lige og ulige permutationer.

10. En kommutativ gruppe G af orden 2000 har præcis et element af orden 2 og præcis 4 elementer af orden 5. Vis, at G må være cyklisk.

11. Hvor mange forskellige perlekæder med 8 perler kan der laves, når der er 2 farver perler at vælge mellem.

I de næste tre opgaver betragtes polynomiet $f = X^{2000} - 1000X^2 - 50$.

12. Afgør, om f er irreducibel som polynomium i ringen $\mathbb{R}[X]$.

13. Afgør, om f er irreducibel som polynomium i ringen $\mathbb{Q}[X]$.

14. Vis, idet koefficienterne i f identificeres med deres restklasser modulo 1999, at f har præcis 2 rødder i $\mathbb{F}_{1999}$. [Vink: brug for eksempel Fermat's lille sætning til at vise, for $x \in \mathbb{Z}$, at $2f(x) \equiv x^2 - 100 \pmod{1999}$.]

15. Bestem for $k = 2000$ en løsning $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ til ligningen $x^2 + y^2 = k^2$ således, at 5 ikke går op i x.

Matematik 2AL, sommeren 2000

1. Bestem i gruppen $(\mathbb{Z}/693)^*$ ordenen af restklassen af 2. (Vink: $693 = 3^2 \cdot 7 \cdot 11$.)

2. Betragt cyklerne $\sigma = (1\,2\,3\,4\,5\,6)$ og $\tau = (5\,6\,7\,8\,9)$ i S_9. Udregn cykelfremstillinger, ordener og fortegn af $\sigma\tau$, $\tau\sigma$ og $\tau\sigma\tau^{-1}$.

3. Vis at den symmetriske gruppe S_9 indeholder elementer af orden 14 og 20, men ingen elementer af orden 21.

4. Vis at følgende grupper er parvis ikke-isomorfe: S_4 , C_{24} , $C_4 \times C_6$, $A_4 \times C_2$.

5. Vis at hvis φ er en gruppehomomorfi fra $(\mathbb{Q}, +)$ til $(\mathbb{Z}, +)$, så er φ triviel, dvs. $\varphi(q) = 0$ for alle $q \in \mathbb{Q}$. (Vink: Start med at vise $\varphi(1) = 0$.)

6. For hvilke primtal p findes en ikke-triviel Sylow-p-undergruppe i den alternerende gruppe A_9, og hvilke ordener har de ikke-trivielle Sylow-p-undergrupper?

7. Vis at en gruppe af orden 135 ikke kan være simpel.

8. Angiv de kommutative grupper af orden $4851 = 3^2 \cdot 7^2 \cdot 11$.

9. Hvor mange perlekæder med 11 perler kan der laves, når der er 4 farver perler at vælge imellem? Det er nok at opstille et regneudtryk for antallet.

10. Vis at primtallet 5 er irreducibelt som element i den kvadratiske talring $\mathbb{Z}[\sqrt{-11}]$. Er 5 et primelement i $\mathbb{Z}[\sqrt{-11}]$? Er $\mathbb{Z}[\sqrt{-11}]$ UFD?

11. Vis at $77 + 55\sqrt{2}$ er et primelement i ringen $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

12. Angiv i Gauss' talring $\mathbb{Z}[i]$ primopløsningen af tallet 380.

I de sidste tre spørgsmål betragtes polynomiet $f = X^5 + 38X^2 - 19$.

13. Afgør om f er irreducibel som polynomium i ringen $\mathbb{R}[X]$.

14. Afgør om f er irreducibel osm polynomium i ringen $\mathbb{Q}[X]$.

15. Afgør, idet koefficienterne i f identificeres med deres restklasser modulo 3, om f er irreducibel i ringen $\mathbb{F}_3[X]$.

Matematik 2AL, vinteren 2000–2001

1. Vis at gruppen $(\mathbb{Z}/189)^*$ indeholder mindst tre elementer af orden 6.

2. Betragt cyklerne $\rho = (1\,2\,3)$ og $\sigma = (3\,4\,5)$ og $\tau = (5\,6\,7)$ i S_7. Udregn cykelfremstillinger, ordener og fortegn af $\rho\sigma$ og $\sigma\tau$ og $\tau\rho$.

3. Bestem potensen σ^{665} af permutationen $\sigma = (3\,4)(2\,4)(4\,6)(4\,5)(1\,6)$ i S_6.

4. En permutation μ i S_{12} har typen $3^2 6^1$. Hvilken type har μ^3?

5. Vis at grupperne $D_6 \times C_2$ og $A_4 \times C_2$ ikke er isomorfe.

6. Vis at der er netop to forskellige gruppehomomorfier fra C_6 til C_2.

7. Angiv ordenerne af de ikke-trivielle Sylow-p-undergrupper i D_{12}.

8. Lad p være et primtal. Vis at Sylow-p-undergrupperne i S_p er isomorfe med Sylow-p-undergrupperne i S_{2p-1}.

9. Vis at hvis en kommutativ gruppe af orden 220 har et element af orden 4, så er den cyklisk.

10. Et kvadratisk mosaik-vindue opbygges ved at sammensætte $3 \times 3 = 9$ lige store farvede glaskvadrater. Hvor mange forskellige vinduer kan der bygges, når der er 5 farver glas at vælge imellem? Det er nok at opsille et regneudtryk for antallet.

11. Angiv i Gauss' talring $\mathbb{Z}[i]$ primopløsninger af tallene $2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,$ og $8 + 3i$.

12. Angiv i talringen $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$ en primopløsning af tallet 31.

13. Vis at netop to af polynomierne $X^6 - 25$, $X^6 - 26$, og $X^6 - 27$ er reducible i polynomiumsringen $\mathbb{Q}[X]$.

14. Vis at polynomiet $f = X^3 - X + 1$ er irreducibelt i polynomiumsringen $\mathbb{F}_3[X]$.

15. Angiv en primopløsning af polynomiet $g = X^6 + X^5 + X^4 + X^3 - X^2 + X + 1$ i polynomiumsringen $\mathbb{F}_3[X]$. [Vink: brug opgave 14.]

Matematik 2AL, sommeren 2001

1. Vis at gruppen $(\mathbb{Z}/44)^*$ har et element af orden 5.

2. I den symmetriske gruppe S_5 betragtes permutationen

$$\sigma = (1\ 2)(1\ 2\ 3)(1\ 2\ 3\ 4)(1\ 2\ 3\ 4\ 5).$$

Udregn cykelfremstilling, orden og fortegn af σ.

3. I den symmetriske gruppe S_5 betragtes en permutation τ som opfylder $\tau \neq e$ og $\tau^5 = e$, hvor e er det neutrale element i S_5. Udregn cykeltype og fortegn af τ.

4. Angiv antallet af elementer af orden 3 i hver af følgende grupper: C_{60}, $A_4 \times C_5$, D_{30} og $D_3 \times D_5$.

5. Lad $(G, +)$ være en cyklisk gruppe og lad φ være en gruppehomomorfi fra $(G, +)$ til $(\mathbb{Q}, +)$. Vis at φ ikke kan være surjektiv.

6. Angiv de kommutative grupper af orden 56. Lad dernæst G være en gruppe af orden 56 som har netop 48 elementer af orden 7. Vis at G ikke er kommutativ.

7. Lad G være en gruppe af orden 56 og lad $a(G)$ betegne antallet af elementer i G af orden 7. Vis at $a(G)$ er 6 eller 48.

8. Angiv ordenerne af de ikke-trivielle Sylow-p-undergrupper i $A_4 \times A_5$.

9. Hvor mange karusseller med 12 heste kan der laves når der er 2 farver heste at vælge imellem? Det er nok at opstille et regneudtryk for antallet.

10. Betragt den kvadratiske talring $\mathbb{Z}[\tau]$ hvor $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ er rod i $X^2 - X - 1$. Afgør hvilke af tallene $4 + 3\tau$, $5 + 4\tau$, $6 + 5\tau$ og $7 + 6\tau$ der er primelementer i $\mathbb{Z}[\tau]$, idet det må benyttes uden bevis at $\mathbb{Z}[\tau]$ er et UFD.

11. Vis at $119+84\sqrt{2}$ ikke er et primelement i den kvadratiske talring $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$. Er $119+84\sqrt{2}$ et irreducibelt element i $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$?

12. Bestem en irreducibel opløsning af tallet 4 i den kvadratiske talring $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$.

13. Afgør om X^2+1 er irreducibelt som polynomium i ringen $\mathbb{C}[X]$, og om det er irreducibelt som polynomium i ringen $\mathbb{R}[X]$.

I de sidste to spørgsmål betragtes polynomierne $f = X^4 + 3X + 3$ og $g = X^2 + X + 1$.

14. Vis at f og g er irreducible som polynomier i ringen $\mathbb{Q}[X]$.

15. Vis, idet koefficienterne i f og g identificeres med deres restklasser modulo 3, at f og g ikke er irreducible som polynomier i ringen $\mathbb{F}_3[X]$.

Matematik 2AL, vinteren 2001–2002

1. Bestem i gruppen $(\mathbb{Z}/630)^*$ ordenen af restklassen af 11. (Vink: $630 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$.)

2. I den symmetriske gruppe S_4 betragtes permutationerne $\sigma_2 = (1\ 2)$, $\sigma_3 = (1\ 2\ 3)$ og $\sigma_4 = (1\ 2\ 3\ 4)$. Udregn cykelfremstillinger, ordener og fortegn af $\sigma_2\sigma_3$ og $\sigma_2\sigma_3\sigma_4$.

3. Bestem de mulige ordener af elementer i den symmetriske gruppe S_6.

4. I den symmetriske gruppe S_{10} betragtes en permutation τ som opfylder $\tau^4 = e$, hvor e er det neutrale element i S_{10}. Hvilke muligheder er der for cykeltypen af τ?

5. Vis at grupperne $D_3 \times C_5 \times C_6$ og $S_3 \times C_3 \times C_{10}$ er isomorfe.

6. Vis at grupperne $D_{12} \times C_5$ og $S_4 \times C_5$ ikke er isomorfe.

7. Bestem for hvilke primtal p det gælder at Sylow-p-undergrupperne i S_p er isomorfe med Sylow-p-undergrupperne i D_p.

8. Vis at hvis en kommutativ gruppe af orden 234 har et element af orden 18, så er den cyklisk. (Vink: $234 = 2 \cdot 3^2 \cdot 13$.)

9. Hvor mange perlekæder med 8 perler kan der laves når der er 5 farver perler at vælge imellem? Det er nok at opstille et regneudtryk for antallet.

10. Betragt den kvadratiske talring $\mathbb{Z}[\tau]$ hvor $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ er rod i $X^2 - X - 1$. Vis at der findes heltal a, b og c så $1 + a\tau$ er invertibel i $\mathbb{Z}[\tau]$ og så $1 + b\tau$ er et primelement i $\mathbb{Z}[\tau]$, men så $1 + c\tau$ hverken er invertibel eller et primelement i $\mathbb{Z}[\tau]$. Det må benyttes uden bevis at $\mathbb{Z}[\tau]$ er et UFD.

11. Bestem en irreducibel opløsning af tallet 73 i den kvadratiske talring $\mathbb{Z}[\sqrt{-8}]$.

12. Afgør hvilke af primtallene 2, 3, 5, 7 og 11 der er primelementer i den kvadratiske talring $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$.

13. Afgør for hvert element α i $\mathbb{F}_5$ om polynomiet $f_\alpha = X^3 + X^2 + \alpha$ er irreducibelt i ringen $\mathbb{F}_5[X]$.

I de sidste to spørgsmål betragtes polynomiet $g = X^4 + X^2 + 1$.

14. Afgør om g er irreducibel som polynomium i ringen $\mathbb{R}[X]$.

15. Afgør, idet koefficienterne i g identificeres med deres restklasser modulo 2, om g er irreducibel som polynomium i ringen $\mathbb{F}_2[X]$.

Matematik 2AL, sommeren 2002

Det er tilladt at skrive med blyant og benytte viskelæder, så længe skriften er læselig, og udviskninger foretages grundigt. Overstregning trækker *ikke* ned og anbefales ved større ændringer.

1. Angiv en gruppeisomorfi $\psi\colon (\mathbb{Z}/210)^* \xrightarrow{\cong} (\mathbb{Z}/7)^* \times (\mathbb{Z}/30)^*$. Bestem ordenen af elementet $[\,31\,]_{210}$ i $(\mathbb{Z}/210)^*$.

2. Bestem cykelfremstillingen af $\sigma = (1234)(34567)(89) \in S_9$ samt $|\sigma|$ og $\operatorname{sign}(\sigma)$.

3. Bestem $\sigma \in S_{10}$, så $|\sigma| = 20$, samt $\tau \in S_{10}$, så $|\tau| > 20$.

4. Bestem samtlige elementordener i gruppen $C_2 \times C_3 \times C_4 \times C_7$.

5. Afgør, om grupperne $G = A_4 \times D_5$ og $H = S_3 \times D_{10}$ er isomorfe.

6. Antag, at G er en *kommutativ* gruppe med $|G| = 140$, samt at der findes $g \in G$ med $|g| = 20$. Bevis, at G er cyklisk. (Udnyt, at $140 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7$.)

7. Lad $\varphi\colon A_5 \to C_{30}$ være en vilkårlig gruppehomomormorfi. Begrund, at φ ikke kan være injektiv. Bevis, at φ er triviel, dvs. $\varphi(\sigma) = 1$ for alle $\sigma \in A_5$. (Udnyt, at kernen for φ er en normal undergruppe af A_5.)

8. Lad G være en gruppe af orden 2002. Begrund, at G ikke er simpel. (Udnyt faktoriseringen $2002 = 2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$ til at bestemme antallet af Sylow–11–undergrupper.)

9. Begrund, at $X^{2002} + 2002$ er irreducibelt i $\mathbb{Z}[\,X\,]$. (Udnyt, at $2002 = 2 \cdot 1001$.)

10. Afgør, om $X^{2002} + 2002$ er irreducibelt i $\mathbb{R}[\,X\,]$.

11. Afgør, om $X^{1936} - 1936$ er irreducibelt i $\mathbb{Q}[\,X\,]$.

I de sidste fire opgaver betragtes den kvadratiske talring $\mathbb{Z}[\,\xi\,]$ med $\xi \overset{\text{def}}{=} \sqrt{-2}$. Det oplyses, at $\mathbb{Z}[\,\xi\,]$ er UFD (og dette ønskes ikke uddybet).

12. Bestem diskriminanten $\mathrm{D}(\xi)$. Bestem normen $\mathrm{N}(x + y\xi)$, når $x, y \in \mathbb{Z}$.

13. Afgør, om $1 - 2\xi$ er divisor i $13 + 10\xi$ inden for $\mathbb{Z}[\,\xi\,]$.

14. Afgør hvilke af elementerne $1 + \xi$, 3, $1 + 3\xi$ og $8 + 3\xi$, der er primelementer i $\mathbb{Z}[\,\xi\,]$.

15. Bestem normen $\mathrm{N}(21 + 6\xi)$ samt primopløsningen af $21 + 6\xi$ inden for $\mathbb{Z}[\,\xi\,]$.

Matematik 2AL, vinteren 2002–03

Det er tilladt at skrive med blyant og benytte viskelæder, så længe skriften er læselig, og udviskninger foretages grundigt. Overstregning trækker *ikke* ned og anbefales ved større ændringer.

1. Bestem ordenen af elementet $[\,4\,]_n$ i den multiplikative gruppe $(\mathbb{Z}/n)^*$ for $n \in \{7, 11, 13\}$. Bestem endvidere ordenen af $[\,4\,]_{1001}$ i $(\mathbb{Z}/1001)^*$. $(1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13.)$

2. Bestem cykelfremstilling, orden og fortegn for $\sigma = (12)(123)(1234)(12345) \in \mathrm{S}_5$.

3. Antag, at $\sigma, \tau \in \mathrm{S}_9$ har $|\sigma| = 5$, og $|\tau| = 6$. Afgør, om $|\sigma\tau| = 12$ kan forekomme. Afgør, om $|\sigma\tau| = 30$ kan forekomme.

4. Betragt de additive kvotientgrupper $\mathbb{Z}/123$ og $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Bestem en *injektiv* gruppehomomorfi $\varphi\colon \mathbb{Z}/123 \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

5. Lad $\psi\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ være en gruppehomomorfi. Begrund, at ψ ikke er surjektiv.

6. Bestem i gruppen $G \overset{\text{Def}}{=} D_3 \times D_6$ et element g^*, som ikke er det neutrale element, således at g^* kommuterer med alle elementer, dvs. $g^*g = gg^*$ for alle $\in G$.

7. Bevis, at grupperne $G = D_3 \times D_6$ og $H = A_4 \times D_3$ ikke er isomorfe. (Udnyt resultatet i opgave 6.)

8. Begrund, at gruppen G ikke er simpel, hvis $|G| = 6009$. (2003 er et primtal!)

9. Afgør, om $X^{2002} - 2025$ er irreducibelt i $\mathbb{Q}[\,X\,]$.

10. Afgør, om $X^{2002} - 2003$ er irreducibelt i $\mathbb{R}[\,X\,]$.

11. Afgør, om $X^{2002} - 2003$ er irreducibelt i $\mathbb{Z}[\,X\,]$.

I de sidste fire opgaver betragtes den kvadratiske talring $\mathbb{Z}[\,\xi\,]$ med $\xi \overset{\text{Def}}{=} -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{-3}}{2}$, som er rod i $X^2 + X + 1 \in \mathbb{Z}[\,X\,]$. Ringen $\mathbb{Z}[\,\xi\,]$ *er* UFD (og dette ønskes ikke uddybet).

12. Bestem diskriminanten $\mathrm{D}(\xi)$. Bestem normen $\mathrm{N}(x + y\xi)$, når $x, y \in \mathbb{Z}$.

13. Afgør hvilke af elementerne ξ, $1 + \xi$ og $1 - \xi$, der er enheder i $\mathbb{Z}[\,\xi\,]$.

14. Afgør hvilke af elementerne $1 - \xi$, 3 og $1 + 3\xi$, der er primelementer i $\mathbb{Z}[\,\xi\,]$.

15. Bestem normen $\mathrm{N}(4 + 5\xi)$ samt primopløsningen af $4 + 5\xi$ inden for $\mathbb{Z}[\,\xi\,]$.

Matematik 2AL, sommeren 2003

I besvarelsen må benyttes, at $22176 = 288{\cdot}7{\cdot}11$, at $2002 = 2{\cdot}7{\cdot}11{\cdot}13$, og at 2003 er et primtal.

1. Bestem i gruppen $(\mathbb{Z}/22176)^*$ ordenen af restklassen af 17.

2. Bestem cykeltype, orden og fortegn for permutationen $(1\,2\,3\,4\,5\,6)(1\,7\,6)(1\,8\,9)(1\,0\,7)$; det er en permutation af de 10 cifre $0, 1, \dots, 9$.

3. Bestem den største mulige orden af en permutation i den alternerende gruppe A_9.

4. Bestem de mulige cykeltyper for permutationer af orden 2 i S_6. Hvor mange permutationer σ i S_6 opfylder, at $\sigma^2 = \mathrm{id}$?

5. Betragt 4-cyklen $\gamma = (1\,2\,3\,4)$ i S_4. Findes der en lige permutation σ i S_4 således, at $\sigma\gamma\sigma^{-1} = \gamma^3$? Findes der en ulige permutation σ i S_4 således, at $\sigma\gamma\sigma^{-1} = \gamma^3$? Findes der en permutation σ i S_4 således, at $\sigma\gamma\sigma^{-1} = \gamma^2$?

6. Angiv de kommutative grupper, der har orden 80 og præcis 3 elementer af orden 2.

7. Bestem 4 ikke-kommutative grupper af orden 120, for hvilke antallene af elementer af orden 2 er forskellige.

8. Vis, at en gruppe G af orden $7^3{\cdot}19^3$ ikke kan være simpel.

9. Lad $\varphi\colon \mathrm{C}_{15} \to \mathrm{C}_{10}$ være en ikke-triviel gruppehomomorfi. Vis, at kernen for φ har orden 3, og at billedet for φ har orden 5. Vis, at der findes en sådan homomorfi.

10. Lad p være et ulige primtal. Hvor mange perlekæder med p perler kan der laves, når der er 2 farver perler at vælge mellem?

11. Bestem i Gauss' talring $\mathbb{Z}[i]$ primopløsninger af tallene 2002 og 2003. Angiv for hvert af disse to tal antallet af divisorer.

12. Hver koefficient i polynomiet $f = X^{2002} - 1$ er 0, 1 eller -1, og f kan opfattes som polynomium i $L[X]$ for et vilkårligt legeme L. Hvor mange rødder har polynomiet i L, når (a) $L = \mathbb{R}$, (b) $L = \mathbb{C}$, (c) $L = \mathbb{F}_{2003}$, (d) $L = \mathbb{F}_{29}$?

I de næste tre opgaver betragtes polynomiet $f = X^4 + 67$.

13. Afgør, om f er irreducibel i $\mathbb{R}[X]$.

14. Afgør, om f er irreducibel i $\mathbb{Q}[X]$.

15. Afgør, idet koefficienterne i f identificeres med deres restklasser modulo 2003, om f er irreducibel i $\mathbb{F}_{2003}[X]$. [Vink: $2003 - 67$ er et kvadrattal.]

Matematik 2AL, vinteren 2003–04

I besvarelsen kan det være nyttigt at vide, at $63457 = 31{\cdot}2047$, at $2^{11} = 2048$, at 2003 er et primtal, og at $2002 = 2{\cdot}7{\cdot}11{\cdot}13$.

1. Bestem i gruppen $(\mathbb{Z}/63457)^*$ ordenen af restklassen af 2.

2. Hvor mange elementer i $(\mathbb{Z}/2003)^*$ har orden 13?

3. Idet de 15 tal $0, 1, \dots, 14$ identificeres med deres restklasser modulo 15, bestemmes en permutation af disse tal ved forskriften $x \mapsto 2x \pmod{15}$. Bestem cykelfremstilling, type, orden og fortegn for denne permutation.

4. Angiv cykeltyperne for permutationer af orden 6 i den alternerende gruppe A_{11}.

5. Lad γ være en given permutation i S_n. Vis, at der altid findes permutationer $\sigma \in \mathrm{S}_n$, som opfylder ligningen $\sigma\gamma\sigma^{-1} = \gamma^{-1}$. Vis, at når σ opfylder ligningen, så vil også $\sigma\gamma$ opfylde ligningen. Vis, at når γ er en ulige permutation, så er ligningen altid opfyldt med en lige permutation σ.

6. Angiv de kommutative grupper, der har orden 162 og indeholder præcis 8 elementer af orden 3.

7. Bestem 4 ikke-kommutative grupper af orden 60, for hvilke antallene af elementer af orden 2 er forskellige.

8. Vis, at en gruppe af orden $3^3{\cdot}13$ ikke kan være simpel.

9. Om en gruppe G vides, at $|G| = 60$ og at G er simpel. Bestem antallet af elementer af orden 5 i G.

10. Lad $\varphi\colon \mathrm{S}_4 \to \mathrm{C}_{10}$ være en ikke-triviel gruppehomomorfi. Vis, at billedet for φ har orden 2 og at kernen for φ har orden 12. Vis, at der findes en sådan homomorfi.

11. Hvor mange perlekæder med 9 perler kan der laves, når der er 2 farver perler at vælge mellem?

12. Bestem i Gauss' talring $\mathbb{Z}[i]$ primopløsninger af tallene 5, $5 + i$, $5 + 2i$, og $5 + 3i$.

I de næste tre opgaver betragtes polynomiet $f = X^6 + 2003$.

13. Afgør, om f er irreducibel i $\mathbb{R}[X]$.

14. Afgør, om f er irreducibel i $\mathbb{Q}[X]$.

15. Afgør, idet koefficienterne i f identificeres med deres restklasser modulo 13, om f er irreducibel i $\mathbb{F}_{13}[X]$.

Matematik 2AL, sommeren 2004

Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt ved besvarelsen, og det er tilladt at benytte blyant ved indskrivningen. Opgavesættet består af 15 opgaver, der vægtes ens ved bedømmelsen. I besvarelsen kan det være nyttigt at vide, at $2004 = 2^2{\cdot}3{\cdot}167$, og at 167 er et primtal.

1. Bestem den største orden af et element i gruppen $(\mathbb{Z}/2004)^*$.

2. Idet tallene $0, 1, 2, \dots, 10$ identificeres med deres restklasser modulo 11, bestemmes en permutation af disse tal ved forskriften $x \mapsto x^3+3 \pmod{11}$. Bestem cykelfremstilling, type, orden og fortegn for denne permutation.

3. Hvilke permutationer konjugerer $(1\,2)(3\,4\,5)$ over i $(1\,2\,3)(4\,5)$? Hvilke af dem er lige?

4. Gruppen S_n kan opfattes som undergruppen af S_{n+2} bestående af de permutationer, der har $n+1$ og $n+2$ som fikspunkt. Lad $\tau = (n{+}1\;n{+}2)$ være transpositionen, der ombytter $n+1$ og $n+2$. For hver permutation $\sigma \in \mathrm{S}_n$ sættes $\sigma^* = \sigma$, hvis $\sigma \in A_n$, og $\sigma^* = \sigma\tau$ ellers. Vis, at afbildningen $\sigma \mapsto \sigma^*$ er en injektiv homomorfi $\mathrm{S}_n \to \mathrm{A}_{n+2}$.

5. Vis, at gruppen $G = \mathrm{C}_4 \times \mathrm{C}_2 \times \mathrm{C}_3 \times \mathrm{C}_3$ er den eneste kommutative gruppe, der har orden 72 og indeholder 24 elementer af orden 6.

6. Gruppen $(\mathbb{Z}/16)^*$ er isomorf med et produkt af cykliske grupper. Angiv dette produkt.

7. Gruppen S_5 virker på mængden $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, og dermed også på mængden $\mathcal{P}$ af alle delmængder af denne mængde. Bestem under denne virkning af S_5 på $\mathcal{P}$ isotropigruppen for $\{1, 2\}$, og banen gennem $\{1, 2\}$.

8. Vis, at der kun er én gruppe af orden $7 \cdot 11 \cdot 13$.

9. Vis, at hvis σ og τ er disjunkte 5-cykler i S_{15}, så udgør permutationerne af formen $\sigma^i\tau^j$ en undergruppe af orden 25. Vis, at Sylow-5-undergrupperne i S_{15} er isomorfe med $\mathrm{C}_5 \times \mathrm{C}_5 \times \mathrm{C}_5$.

10. Lad m betegne antallet af Sylow-3-undergrupper i en gruppe af orden 60. Bestem de værdier af m, der er mulige ifølge Sylow's sætninger. Giv for hver af disse værdier af m et eksempel på en gruppe af orden 60 med præcis m Sylow-3-undergrupper.

11. Et kvadratisk mosaik-vindue opbygges ved at sammensætte $3 \times 3 = 9$ små farvede glaskvadrater. Hvor mange forskellige vinduer kan der bygges, når midterkvadratet skal være gult og hvert af de øvrige 8 kvadrater skal have en af farverne rød, grøn eller blå.

12. Vis, i den kvadratiske talring $\mathbb{Z}[\sqrt{11}]$, at tallet $3-2\sqrt{11}$ er divisor i $53-12\sqrt{11}$. Vis, at tallet $3-2\sqrt{11}$ har en ikke-triviel divisor. [Vink: led blandt tal med norm 5.] Bestem en irreducibel opløsning af $53-12\sqrt{11}$.

I de næste tre opgaver betragtes polynomiet $f = X^4 + 12X^2 + 9$.

13. Afgør, om $f(X)$ er irreducibel i $\mathbb{R}[X]$.

14. Afgør, om $f(X)$ er irreducibel i $\mathbb{Q}[X]$. [Vink: kig på polynomiet $f(X+1)$.]

15. For et primtal $p > 3$ identificeres koefficienterne i f med deres restklasser modulo p. Vis, at hvis f i $\mathbb{F}_p$ har roden a, så har f fire rødder i $\mathbb{F}_p$, nemlig $\pm a$ og $\pm 3a^{-1}$.

Inden mundtlig eksamen blev det besluttet, „at 13 helt rigtigt besvarede opgaver regnes for fuld besvarelse; i praksis foregår justeringen ved at de to dårligst besvarede opgaver ikke indgår i vurderingen.“

Matematik 2AL, vinteren 2004–05

Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt ved besvarelsen, og det er tilladt at benytte blyant ved indskrivningen. Opgavesættet består af 15 opgaver, der vægtes ens ved bedømmelsen. I besvarelsen kan det være nyttigt at vide, at $2004 = 2^2{\cdot}3{\cdot}167$, at $2005 = 5{\cdot}401$, og at 167 og 401 er primtal.

1. Hvilken orden har gruppen $(\mathbb{Z}/2005)^*$? Bestem den største orden af et element i denne gruppe.

2. Idet $\sigma := (1\,2\,3\,4)(1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,9)(6\,7\,8\,9)$ ønskes bestemt cykelfremstilling, type, orden og fortegn for σ. Bestem potensen σ^{2004}.

3. Bestem det mindste naturlige tal n således, at A_n indeholder en permutation af orden 2004.

4. Bestem de mulige cykeltyper for de permutationer σ i S_6, som opfylder, at σ^2 har cykeltypen $1^2 2^2$, altså er en dobbelttransposition.

5. Hvor mange permutationer i S_6 kommuterer med dobbelttranspositionen $(1\,2)(3\,4)$?

6. Bestem de kommutative grupper af orden $5^3{\cdot}31$.

7. Vis, at en gruppe af orden $5^3{\cdot}31$ ikke kan være simpel.

8. Hvilken orden har Sylow-167-undergruppen i S_{2004}?

9. Betragt den kvadratiske talring $R = \mathbb{Z}[\sqrt{7}]$. Vis, at tallene $2 \pm \sqrt{7}$ er irreducible og ikke associerede i R. Vis, at tallene $3 \pm \sqrt{7}$ er irreducible og associerede i R.

I de næste tre opgaver betragtes polynomiet $f = X^{2010} + 580$.

10. Afgør, om $f(X)$ er irreducibel i $\mathbb{R}[X]$.

11. Afgør, om $f(X)$ er irreducibel i $\mathbb{Q}[X]$.

12. Idet koefficienterne i f identificeres med deres restklasser modulo 401, kan f opfattes som polynomium i $\mathbb{F}_{401}[X]$. Vis, at restklassen af 2 modulo 401 er rod. Hvor mange rødder har polynomiet i $\mathbb{F}_{401}$? [Vink: Vis, og udnyt, at for alle $a \in \mathbb{F}_{401}^*$ er $a^{2010} = a^{10}$.]

13. Lagkager, bestående af 6 ens stykker, glaceres sådan, at hvert stykke er ensfarvet. Der er glasur af 4 forskellige farver. Hvor mange forskellige lagkager findes der?

14. Hvor mange forskellige perlekæder med 6 glasperler findes der, når der er perler af 4 forskellige farver?

15. På hvor mange måder kan man lægge æbleskiver af 4 forskellige farver i en æbleskivepande, når det midterste af de 7 huller skal være tomt?

Matematik 2AL og Algebra 2, juni 2005

Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt ved besvarelsen, og det er tilladt at benytte blyant ved indskrivningen. Opgavesættet består af 15 opgaver, der vægtes ens ved bedømmelsen. Ved besvarelsen kan det være nyttigt at vide, at $1864 = 8 \cdot 233$, at $2005 = 5 \cdot 401$, og at 233 og 401 er primtal.

1. Hvilken orden har gruppen $(\mathbb{Z}/1864)^*$? Angiv, med begrundelse, den største orden af et element i denne gruppe.

2. Betragt permutationen $\sigma = (1\,2)(3\,4\,5\,6)$ i S_6. Bestem antallet af med σ konjugerede permutationer, og angiv centralisatoren $C(\sigma)$ for σ.

3. Vis, at følgende tre grupper D_{12}, $C_2 \times A_4$ og S_4 er parvis ikke-isomorfe.

4. Angiv ordenerne af Sylow-p-undergrupperne af S_6 og A_6 for de relevante primtal p.

5. Vis, at en gruppe af orden 2005^2 ikke kan være simpel.

6. Bestem alle kommutative grupper af orden 80. Afgør, med begrundelse, om de to grupper $C_2 \times C_{40}$ og $C_2 \times C_2 \times C_{20}$ er isomorfe.

7. Bestem antallet af perlekæder med 9 perler og 3 farver perler. Det er tilstrækkeligt at angive et eksplicit regneudtryk for dette antal.

For en kommutativ ring R kaldes et element $a \in R$ for en *nuldeler*, hvis der findes et element $b \in R$, med $b \neq 0$, så $ab = 0$.

8. Bestem nuldelerne i ringen $\mathbb{Z}/12$, og vis, at de ikke udgør et ideal.

9. Bestem nuldelerne i ringen $\mathbb{Z}/9$. Vis, at hvis nuldelerne i en ring R udgør et ideal i R så er dette ideal et primideal.

I de følgende to opgaver betegner f polynomiet $X^4 + 180$.

10. Afgør, med begrundelse, om f er irreducibel i $\mathbb{R}[X]$.

11. Afgør, med begrundelse, om f er irreducibel i $\mathbb{Q}[X]$.

I de følgende to opgaver betegner g polynomiet $X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$. Det kan uden bevis benyttes, at $(X-1)(X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1) = X^6 - 1$.

12. Skriv g som produkt af irreducible polynomier i $\mathbb{R}[X]$ og $\mathbb{C}[X]$.

13. Skriv g som produkt af irreducible polynomier i $\mathbb{F}_7[X]$, hvor $\mathbb{F}_7$ betegner legemet med 7 elementer.

14. Bestem mængden af enheder i den kvadratiske talring $\mathbb{Z}[\sqrt{-13}]$.

15. Angiv, med begrundelse, to forskellige irreducible opløsninger af et element fra den kvadratiske talring $\mathbb{Z}[\sqrt{-13}]$.