Matematik 2AL og Algebra 2

3 timers skriftlig prøve.

Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt ved besvarelsen, og det er tilladt at benytte blyant ved indskrivningen. Opgavesættet består af 15 opgaver, der vægtes ens ved bedømmelsen. Ved besvarelsen kan det være nyttigt at kende primopløsningerne $2006 = 2 \cdot 17 \cdot 59$ og $1092 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13$.

1. Hvilken orden har gruppen $(\mathbb{Z}/2006)^*$? Bestem den største orden af et element i denne gruppe.

2. Betragt diedergruppen D_{2006}. Angiv en normal, ikke-triviel undergruppe. Angiv en undergruppe, der ikke er normal.

3. Betragt permutationen $\sigma = (1)(2\,3)(4\,5\,6)$ i gruppen S_6. Bestem antallet af de med σ konjugerede permutationer, og angiv centralisatoren $C(\sigma)$ for σ.

4. Bestem antallet af kommutative grupper af orden 2006. Angiv 2 ikke-kommutative grupper af orden 2006.

5. Angiv ordenen af en Sylow-5-undergruppe i A_{100}.

6. Bestem antallet af elementer af orden 13 i en simpel gruppe af orden 1092.

7. Bestem antallet af undergrupper i den cykliske gruppe C_{2006}.

8. Bestem de tal d, der er orden af et element i $(\mathbb{Z}/16)^*$. Hvilke af grupperne C_8, $\mathrm{C}_4 \times \mathrm{C}_2$ og $\mathrm{C}_2 \times \mathrm{C}_2 \times \mathrm{C}_2$ er isomorfe med $(\mathbb{Z}/16)^*$? Er grupperne $(\mathbb{Z}/16)^*$ og $(\mathbb{Z}/15)^*$ isomorfe?

9. Bestem antallet af perlekæder med 10 perler udvalgt blandt perler af 2 farver. Det er tilstrækkeligt at angive et eksplicit regneudtryk for antallet.

10. Et element a i en kommutativ ring R kaldes *nilpotent*, hvis der findes et naturligt tal n således, at $a^n = 0$. Bestem de nilpotente elementer i $\mathbb{Z}/24$.

11. Bestem i den kvadratiske talring $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ normen af de 4 tal $2 + \sqrt{5}$, $1 + 2\sqrt{5}$, $9 - 4\sqrt{5}$ og $\sqrt{5}$. Hvilke af de 4 tal er enheder? Hvilke er irreducible?

12. Bestem i den kvadratiske talring $\mathbb{Z}[i]$ primopløsningen af tallet 2006.

I de følgende tre opgaver betragtes polynomiet $f = X^{2007} + 2005$.

13. Øjensynlig har f den reelle rod $a := -\sqrt[2007]{2005}$, så f kan i $\mathbb{R}[X]$ skrives på formen $f = (X - a)g$ med $g \in \mathbb{R}[X]$. Afgør, om g er irreducibel i $\mathbb{R}[X]$.

14. Afgør, om f er irreducibel i $\mathbb{Q}[X]$.

15. Afgør, idet f's koefficienter identificeres med deres restklasser modulo 17, hvor mange rødder f har i $\mathbb{F}_{17}$.