

Uge 5.

Enkelte deltagere har formodentlig bemærket, at mit håb om at kunne lægge en ugeseddel ud på nettet inden hver uges undervisning var ganske forfængeligt: Denne ugeseddel til den 5. uge er faktisk den anden ugeseddel.

Kommentar. Alle (interessante) kommutative ringe kommer fra enten talteori (det er talringene) eller fra algebraisk geometri. Geometrisk opstår de sådan:

Lad k være et fast legeme, og lad $P = k[X_1, \dots, X_n]$ være polynomiumsringen i n variable. For hver delmængde $F \subseteq P$ kan man betragte mængden af nulpunkter for F , dvs mængden af fælles nulpunkter for polynomierne i F :

$$\mathcal{V}(F) = \{ \alpha \in k^n \mid f(\alpha) = 0 \text{ for alle } f \in F \},$$

og for hver delmængde $W \subseteq k^n$ kan man betragte idealet af polynomier, der er nul på W :

$$\mathfrak{I}(W) = \{ f \in P \mid f(\alpha) = 0 \text{ for alle } \alpha \in W \}.$$

Med et enkelt punkt som W , altså $W = \{ \alpha \}$, består idealet $\mathfrak{m}_\alpha := \mathfrak{I}(\alpha)$ af de polynomier, der har α som nulpunkt. Det er et maksimalideal, nemlig kernen for den surjektive homomorfi $P \rightarrow k$ bestemt ved $f \mapsto f(\alpha)$.

Til hvert polynomium $f \in P$ hører en *polynomiumsfunction* f_W på W , nemlig funktionen $\alpha \mapsto f(\alpha)$ for $\alpha \in W$. Ringen af polynomiumsfunctioner på W betegnes $\mathcal{P}_k(W)$; den er øjensynlig billedringen ved homomorfien $P \rightarrow \mathcal{F}_k(W)$ bestemt ved $f \mapsto f_W$. Den kaldes også *koordinatringen* for W : Polynomiet X_i giver jo som polynomiumsfunction den i 'te koordinatfunktion $\alpha \mapsto \alpha_i$, og $\mathcal{P}_k(W)$ er delalgebraen frembragt af de n koordinatfunktioner.

Kernen for homomorfien $f \mapsto f_W$ er $\mathfrak{I}(W)$ (så $\mathfrak{I}(W)$ er et ideal). Isomorfiætningen er en isomorfi:

$$P/\mathfrak{I}(W) \xrightarrow{\sim} \mathcal{P}_k(W).$$

Delmængder $V \subseteq k^n$ af formen $V = \mathcal{V}(F)$ kaldes *algebraiske mangfoldigheder*. For enhver delmængde $F \subseteq P$ har idealet $\mathfrak{a} := PF$ frembragt af F de samme nulpunkter som F . Enhver mangfoldighed V er altså de fælles nulpunkter for polynomierne i et ideal, $V = \mathcal{V}(\mathfrak{a})$. Ifølge Hilbert's basissætning er hvert ideal i P endeligt frembragt, og det medfører så, at hver mangfoldighed i k^n er de fælles nulpunkter for endelig mange polynomier.

Det er let at indse, at

$$\mathcal{V}(\mathfrak{I}(\mathcal{V}(F))) = \mathcal{V}(F).$$

Derfor gælder for hver mangfoldighed V , at $V = \mathcal{V}(\mathfrak{I}(V))$. Man kan altså vælge idealet \mathfrak{a} med $V = \mathcal{V}(\mathfrak{a})$ sådan, at $\mathfrak{a} = \mathfrak{I}(V)$. Med dette valg er $k[X_1, \dots, X_n]/\mathfrak{a} = \mathcal{P}_k(V)$.

De interessante ringe er så koordinatringene $\mathcal{P}_k(V)$ for mangfoldigheder (og mere generelt, kvotientringe P/\mathfrak{a} for vilkårlige idealer) og deres brøkringe. Bemærk, at i en brøk a/s , for $a, s \in \mathcal{P}_k(V)$, er tæller og nævner funktioner defineret på V , og brøken bestemmer, i hvert fald intuitivt, en funktion, defineret i de punkter, hvor nævneren er forskellig fra 0.

21. september 2005

Hilbert's Nulpunktssætning, version 2. Antag, at k er algebraisk afsluttet. Da har ethvert maksimalideal i P formen \mathfrak{m}_α med $\alpha \in k^n$. Alternativt: For hvert ægte ideal $\mathfrak{a} \subseteq P$ er $\mathcal{V}(\mathfrak{a}) \neq \emptyset$.

Bevis. Lad $\mathfrak{m} \subseteq P$ være et maksimalideal. Da er kvotienten $K := P/\mathfrak{m}$ et legeme, og det vides fra Version 1 af Nulpunktssætningen, at K har endelig dimension over k . Da k er algebraisk afsluttet, følger det, at $K = k$ eller, mere præcist, at $k \rightarrow K$ er en isomorfi. Der findes altså elementer α_i i k , som afbildes på restklasserne af X_i modulo \mathfrak{m} . Men det betyder, at den kanoniske afbildning $P \rightarrow P/\mathfrak{m}$ har formen $f \mapsto f(\alpha)$, og vi får den ønskede lighed $\mathfrak{m} = \mathfrak{I}(\alpha) = \mathfrak{m}_\alpha$.

For at indse ækvivalensen af de to formuleringer er det nok at bemærke, at der øjensynlig for hvert ideal \mathfrak{a} og $\alpha \in k^n$ gælder:

$$\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{m}_\alpha \iff \alpha \in \mathcal{V}(\mathfrak{a}). \quad \square$$

Hilbert's Nulpunktssætning, version 3. Antag, at k er algebraisk afsluttet. Da gælder for hvert ideal $\mathfrak{a} \subseteq P$, at

$$\mathfrak{I}(\mathcal{V}(\mathfrak{a})) = \text{Rad}(\mathfrak{a}).$$

Bevis. Antag, at $\mathfrak{a} = (f_1, \dots, f_r)$. Sæt $V := \mathcal{V}(f_1, \dots, f_r)$. Hvis $f^N \in (f_1, \dots, f_r)$, så er $f(\alpha)^N = 0$ for $\alpha \in V$, og så er også $f(\alpha) = 0$ for $\alpha \in V$; altså er $f \in \mathfrak{I}(V)$. Hermed er „ \supseteq “ bevist.

Antag omvendt, at $f \in \mathfrak{I}(V)$, altså at $f(\alpha) = 0$ for $\alpha \in V$. Betragt følgende ideal i $k[X_1, \dots, X_n, T]$:

$$\mathfrak{b} := (f_1, \dots, f_r, 1 - Tf).$$

Det påstås, at $\mathcal{V}(\mathfrak{b}) = \emptyset$. Antag nemlig, at $(\alpha, \beta) \in k^{n+1}$ er nulpunkt for \mathfrak{b} . Så er f_1, \dots, f_r nul i punktet, dvs $f_1(\alpha) = \dots = f_r(\alpha) = 0$, og så er $\alpha \in V$. Da $f \in \mathfrak{I}(V)$, følger det, at $f(\alpha) = 0$. I punktet (α, β) får polynomiet $1 - Tf$ derfor værdien 1, i modstrid med at punktet (α, β) var et nulpunkt for alle polynomier i \mathfrak{b} .

Da $\mathcal{V}(\mathfrak{b}) = \emptyset$, følger det af Version 2, at $\mathfrak{b} = k[X_1, \dots, X_n, T]$, altså at $1 \in \mathfrak{b}$. Derfor findes polynomier $G_i \in k[X_1, \dots, X_n, T]$ for $i = 0, \dots, r$ således, at

$$1 = G_1 f_1 + \dots + G_r f_r + G_0(1 - Tf).$$

De to sider i denne ligning er to polynomier i $P[T]$. Vi kan danne brøkringen $P_f = P[1/f]$, og heri kan vi evaluere de to polynomier for $T = 1/f$. Bemærk, at faktoren $1 - Tf$ forsvinder ved evalueringen. De øvrige led på højresiden vil indeholde varierende potenser af $1/f$. Multiplicer den opnåede ligning med en stor potens af f . Så fremkommer øjensynlig en ligning i P af følgende form:

$$f^N = g_1 f_1 + \dots + g_r f_r.$$

Altså er $f \in \text{Rad}(\mathfrak{a})$. Hermed er den omvendte inklusion, og derfor den påståede lighed, bevist. □

Anders Thorup