

#### 4. obligatoriske prøve i KomAlg

Prøven består af seks spørgsmål, der alle skal besvares. Besvarelsen afleveres senest onsdag den 2/11 ved øvelserne.

1. Bestem for  $R = \mathbb{Z}$  og  $\mathfrak{a} = (24)$  Hilbert–Samuel-polynomiet  $\chi_{\mathfrak{a}, M}$  for  $M = \mathbb{Z}$ . – Og for  $M = \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ , og  $M = \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$  og  $M = \mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ .
2. Lad  $\varphi$  være en endomofi i modulen  $M$ , dvs en lineær afbildning  $\varphi: M \rightarrow M$ . Vis, at kæden af kerner er stigende:  $\text{Ker } \varphi \subseteq \text{Ker } \varphi^2 \subseteq \text{Ker } \varphi^3 \subseteq \dots$ , og at kæden af billeder er dalende:  $\varphi M \supseteq \varphi^2 M \supseteq \varphi^3 M \supseteq \dots$ . Vis, at der findes et kommutativt diagram med exakte rækker,

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \text{Ker } \varphi^n & \longrightarrow & M & \xrightarrow{\varphi^n} & \varphi^n M & \longrightarrow & 0 \\
 & & \text{inkl.} \downarrow & & \downarrow = & & \downarrow \varphi & & \\
 0 & \longrightarrow & \text{Ker } \varphi^{n+1} & \longrightarrow & M & \xrightarrow{\varphi^{n+1}} & \varphi^{n+1} M & \longrightarrow & 0.
 \end{array}$$

Slut heraf, at  $\text{Ker } \varphi^n = \text{Ker } \varphi^{n+1}$ , hvis og kun hvis restriktionen  $\varphi: \varphi^n M \rightarrow \varphi^n M$  er injektiv. Antag nu, at (mindst) et af billederne  $\varphi^i M$  har endelig længde. Vis, at når  $n \gg 0$ , så er restriktionen  $\varphi: \varphi^n M \rightarrow \varphi^n M$  bijektiv og  $M = \text{Ker } \varphi^n \oplus \varphi^n M$ .

3. Lad  $\mathfrak{a} \subseteq R$  være et ideal, og lad  $M$  være en  $R$ -modul. Vis, at  $\text{Supp}(M/\mathfrak{a}M) \subseteq \text{Supp } M \cap \text{Supp}(R/\mathfrak{a})$ , og at lighed gælder, når  $M$  er endeligt frembragt. [Vink: Brug Nakayama's Lemma.]
4. I  $R := k[X, Y]$  ( $k$  er et legeme) betragtes primidealene  $\mathfrak{q} = (0)$ ,  $\mathfrak{p} := (Y)$  og  $\mathfrak{m} := (X, Y)$ , og kvotienten  $M := R/\mathfrak{p}$  som  $R$ -modul. Bestem brøkmødulerne  $M_{\mathfrak{q}}$ ,  $M_{\mathfrak{p}}$ , og  $M_{\mathfrak{m}}$ , og deres Krull-dimensioner.
5. Vis i ringen  $R := \mathbb{Z}_{(5)}$ , at idealet  $(0)$  og potenserne  $(5^n)$  for  $n = 0, 1, 2, \dots$  er samtlige idealer.
6. Antag, at  $R$  er et integritetsområde. Vis, at et ikke-konstant polynomium  $f \in R[X]$  ikke kan være helt over  $R$ . Antag, at  $k$  er et legeme, og at  $f_1, \dots, f_r$  er polynomier i  $k[T]$ . Hvad kan du sige om dimensionen af  $k[f_1, \dots, f_r]$ ?