5. Artin–Rees' sætninger.

(5.1) Definition. Lad $\mathfrak{a}$ være et fast ideal i R. Det er klart, at polynomierne i $R[T]$ af formen,

$$a_0 + a_1 T + \cdots + a_n T^n, \text{ hvor } a_i \in \mathfrak{a}^i \text{ for alle } i,$$

udgør en delring. Denne delring kaldes *Rees-ringen* for idealet $\mathfrak{a}$, og den betegnes i det følgende $\tilde{R}$. Idet monomierne af formen aT^i, hvor $a \in \mathfrak{a}^i$, udgør undergruppen $\mathfrak{a}^i T^i$ af $R[T]$, er altså

$$\tilde{R} = R \oplus \mathfrak{a}T \oplus \mathfrak{a}^2 T^2 \oplus \cdots .$$

Rees-ringen $\tilde{R}$ er øjensynlig en positivt gradueret ring med $(\tilde{R})_0 = R$.

Lad M være en R-modul. Det er klart hvorledes den direkte sum,

$$M^* := M \oplus M \oplus M \oplus \cdots ,$$

kan organiseres som en gradueret modul over polynomiumsringen $R[T]$. Multiplikation med T i M^* forskyder blot graden: elementet $x \in M$ opfattet som homogent element af grad i i M^* afbildes på sig selv opfattet som homogent element af grad $i+1$ i M^*.

Den graduerede modul M^* kan specielt opfattes som en gradueret modul over delringen $\tilde{R}$. Videre er det klart, at følgende undergruppe i M^*:

$$\tilde{M} := M \oplus \mathfrak{a}M \oplus \mathfrak{a}^2 M \oplus \cdots$$

er en homogen $\tilde{R}$-modul. Den kaldes også *Rees-modulen* for M (mht det faste ideal $\mathfrak{a}$ i R).

(5.2) Lemma. *Hvis idealet $\mathfrak{a}$ er frembragt af endelig mange elementer $a_1, \dots, a_d$, så er Rees-ringen $\tilde{R}$ frembragt som R-algebra af elementerne $a_1T, \dots, a_dT$ (der er homogene af grad 1 i $\tilde{R}$). Hvis R-modulen M er frembragt af elementer $v_1, \dots, v_n$, så er Rees-modulen $\tilde{M}$ frembragt som $\tilde{R}$-modul af $v_1, \dots, v_n$ opfattet som homogene elementer af grad 0 i $\tilde{M}$.*

Bevis. Begge påstande eftervises umiddelbart. □

(5.3) Observation. Den første påstand udsiger, at algebra-homomorfien

$$R[T_1, \dots, T_d] \to \tilde{R},$$

defineret ved $f \mapsto f(a_1T, \dots, a_dT)$, er surjektiv. Denne homomorfi er øjensynlig en homogen homomorfi af graduerede ringe, og resultatet medfører derfor at Rees-ringen R er isomorf med en kvotient af polynomiumsringen $R[T_1, \dots, T_d]$ modulo et homogent ideal.

(5.4) Bemærkning. Ingen af de foregående definitioner og resultater har udnyttet den stiltiende forudsætning, at R er en noethersk ring. Indrages denne forudsætning, følger det af Hilbert's Basissætning og det første resultat i Lemma (5.3), at Rees-ringen $\tilde{R}$ er en noethersk ring, og af det andet resultat, at Rees-modulen for en endeligt frembragt R-modul er en noethersk $\tilde{R}$-modul.

(5.5) Artin–Rees' Lemma. *Lad $\mathfrak{a}$ være et ideal i R og lad M være en endeligt frembragt R-modul. Lad videre N være en undermodul i M. Da findes et naturligt tal d, således at*

$$\mathfrak{a}^n M \cap N = \mathfrak{a}^{n-d}\big(\mathfrak{a}^d M \cap N\big) \text{ for alle } n \geqslant d.$$

Specielt er $\mathfrak{a}^n M \cap N \subseteq \mathfrak{a}^{n-d} N$ for alle $n \geqslant d$.

Bevis. Ifølge definitionen er Rees-modulen $\tilde{M}$ en homogen undermodul i $\tilde{R}$-modulen M^*. Det er klart, at også N^* er en homogen undermodul i M^*. Fællesmængden af disse to undermoduler er øjensynlig den homogene undermodul,

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}_0 \oplus \mathcal{N}_1 \oplus \mathcal{N}_2 \oplus \cdots, \text{ hvor } \mathcal{N}_n := \mathfrak{a}^n M \cap N.$$

Af Lemma (5.2), jfr Bemærkning (5.4), følger, at $\tilde{M}$ er en noethersk $\tilde{R}$-modul. Da $\mathcal{N}$ er en undermodul i $\tilde{M}$, følger det, at $\mathcal{N}$ er en endeligt frembragt $\tilde{R}$-modul. Heraf følger, at $\mathcal{N}$ er frembragt som $\tilde{R}$-modul af endelig mange homogene elementer. Videre er $\tilde{R}$ ifølge Lemma (5.2) frembragt som R-algebra af homogene elementer af grad 1. Vælges d større end eller lig med graderne af de homogene elementer, der frembringer $\mathcal{N}$, kan man derfor slutte, at den homogene undermodul $\mathcal{N}_{\geqslant d}$ er frembragt som $\tilde{R}$-modul af elementerne i $\mathcal{N}_d$. Med andre ord er hvert homogent element i $\mathcal{N}_n$ for $n \geqslant d$ er en sum af produkter he, hvor $h \in \tilde{R}_{n-d}$ og $e \in \mathcal{N}_d$. Da $\mathcal{N}_n = \mathfrak{a}^n M \cap N$, gælder altså for $n \geqslant d$ ligningen,

$$\mathfrak{a}^n M \cap N = \mathfrak{a}^{n-d}(\mathfrak{a}^d M \cap N).$$

Hermed er Lemma'ets første påstand bevist. Den anden påstand er øjensynlig en konsekvens af den første. □

(5.6) Krull's Snitsætning. *Antag, at R er lokal med maksimalideal $\mathfrak{m}$. Da gælder for enhver endeligt frembragt R-modul M, at*

$$\bigcap_n \mathfrak{m}^n M = 0.$$

Bevis. Lad N betegne fællesmængden ovenfor. Ifølge Artin–Rees' Lemma findes et naturligt tal d således at inklusionen,

$$\mathfrak{m}^n M \cap N \subseteq \mathfrak{m}^{n-d} N,$$

er opfyldt for $n \geqslant d$. Undermodulerne $\mathfrak{m}^n M$ er en dalende følge af undermoduler i M, med fællesmængde N. Fællesmængden, for $n > d$, af modulerne på venstresiden af inklusionen, er derfor er lig med N. Højresiden af inklusionen, for $n > d$, er øjensynlig indeholdt i $\mathfrak{m}N$. Det følger derfor, at $N \subseteq \mathfrak{m}N$. Altså er $N = \mathfrak{m}N$. Af Nakayama's Lemma følger derfor, at $N = 0$. □