I resten af dette kapitel antages, at R er en noethersk ring.

2. Filtrationsætningen.

(2.1) Sætning. *Lad M være en R-modul. Enhver annullator $\mathrm{Ann}(y)$, hvor y er et element forskelligt fra 0 i M, er indeholdt i et associeret primideal. Ethvert primideal $\mathfrak{p}$ i støtten for M indeholder et associeret primideal. Specielt eksisterer der associerede primidealer til M, hvis M ikke er nul-modulen.*

Bevis. Sætningens sidste påstand er øjensynlig en konsekvens af den første påstand.

For at vise den første påstand, betragtes mængden af annullatorer $\mathrm{Ann}(x)$ med $x \in M \setminus \{0\}$ og $\mathrm{Ann}(x) \supseteq \mathrm{Ann}(y)$. Da R er noethersk findes en annullator $\mathrm{Ann}(x_0)$, der er maksimal blandt disse annullatorer. Det er klart, at annullatoren $\mathrm{Ann}(x_0)$ er maksimal blandt alle annullatorer $\mathrm{Ann}(x)$ med $x \neq 0$. Af den første påstand i Sætning (1.9) følger, at $\mathrm{Ann}(x_0)$ er et primideal associeret til M, og ifølge valget er $\mathrm{Ann}(y) \subseteq \mathrm{Ann}(x_0)$. Hermed er den første påstand bevist.

Sætningens anden påstand følger tilsvarende af den anden påstand i Sætning (2.9). □

(2.2) Bemærkning. Det følger af Sætning (2.1), at hvert minimalt primideal $\mathfrak{q}$ for M, altså et primideal $\mathfrak{q}$ der er minimalt blandt primidealerne i støtten for M, må være et associeret primideal. For moduler i almindelighed kan man vise, ved hjælp af Zorn's Lemma, at hvert primideal i støtten for M indeholder et minimalt primideal for M. For modulerne behandlet her (endeligt frembragte over en noethersk ring) er det en direkte konsekvens af det efterfølgende resultat.

(2.3) Filtrationssætning. *Lad M være en endeligt frembragt R-modul. Da gælder:* (1) *Der findes i M en filtration,*

$$(0) = F_0 \subseteq F_1 \subseteq \cdots \subseteq F_n = M,$$

hvor de successive kvotienter F_i/F_{i-1}, for $i = 1, \dots, n$, er isomorfe med moduler af formen $R/\mathfrak{p}_i$, hvor $\mathfrak{p}_i$ er et primideal.

(2) *For enhver sådan filtration i M gælder følgende relationer mellem mængder af primidealer,*

$$\mathrm{Ass}\, M \subseteq \{\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n\} \subseteq \mathrm{Supp}\, M.$$

Yderligere vil ethvert primideal i støtten for M indeholde et af $\mathfrak{p}_i$'erne, og de tre mængder ovenfor har de samme minimale elementer.

(3) *Lad $\mathfrak{p}$ være et minimalt primideal for M. Da er antallet af gange $R/\mathfrak{p}$ forekommer som kvotient i filtrationen, dvs antallet af i'er for hvilke F_i/F_{i-1} er isomorf med $R/\mathfrak{p}$, entydigt bestemt, idet antallet er lig med længden, $\mathrm{long}_{R_\mathfrak{p}} M_\mathfrak{p}$, af $R_\mathfrak{p}$-modulen $M_\mathfrak{p}$.*

Bevis. (1) Sæt $F_0 := (0)$. Hvis $M = 0$, er den ønskede filtration opnået, med $n = 0$ (og ingen kvotienter). Antag derfor, at $M \neq 0$. Af den sidste påstand i Sætning (2.1) følger så, at M har en undermodul F_1 isomorf med $R/\mathfrak{p}$, hvor $\mathfrak{p}$ er et (associeret) primideal. Hvis $F_1 = M$ er den ønskede filtration opnået. Ellers er $M/F_1 \neq 0$. Af Sætning (2.1) følger så igen, at M/F_1 har en undermodul isomorf med $R/\mathfrak{p}_2$, hvor $\mathfrak{p}_2$ er et primideal. Ifølge Noether's anden Isomorfisætning svarer denne undermodul i M/F_1 til en undermodul $F_2 \supseteq F_1$, og F_2/F_1 er isomorf med $R/\mathfrak{p}_2$. Hvis $F_2 = M$ er den ønskede filtration opnået. Ellers fortsættes processen med M/F_2. Da M er endeligt frembragt, og dermed noethersk, stopper processen efter endelig mange skridt, med den ønskede filtration.

(2) Betragt nu en given filtration af formen i (1). Den første inklusion vises ved induktion efter n. Hvis $n = 0$ er venstresiden tom, så inklusionen gælder. Hvis $n > 0$ følger det af Sætning (1.7), at

$$\operatorname{Ass} M \subseteq \operatorname{Ass} F_{n-1} \cup \operatorname{Ass}(M/F_{n-1}).$$

Ifølge induktionsantagelsen er $\operatorname{Ass} F_{n-1}$ indeholdt i $\{\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_{n-1}\}$, og ifølge Eksempel (1.6) er $\operatorname{Ass}(M/F_{n-1}) = \operatorname{Ass}(R/\mathfrak{p}_n) = \{\mathfrak{p}_n\}$. Heraf følger den første inklusion.

Betragt nu et vilkårligt primideal $\mathfrak{p}$ i R. Ved lokalisering i $\mathfrak{p}$ fremkommer en filtration i $M_\mathfrak{p}$: Ifølge Isomorfisætningen for brøkmoduler er $(F_{i-1})_\mathfrak{p}$ en undermodul i $(F_i)_\mathfrak{p}$, og den tilsvarende kvotient er $(F_i/F_{i-1})_\mathfrak{p}$. Denne sidste kvotient er ifølge antagelsen isomorf med $(R/\mathfrak{p}_i)_\mathfrak{p}$, som ligeledes kan bestemmes af Isomorfisætningen for brøkmoduler: den er isomorf med $R_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}_i R_\mathfrak{p}$. Her gælder ifølge Lokaliseringsprincippet, at kvotienten er lig med 0, hvis og kun hvis $\mathfrak{p}_i \not\subseteq \mathfrak{p}$. Altså er

$$(F_i)_\mathfrak{p}/(F_{i-1})_\mathfrak{p} = \begin{cases} R_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}_i R_\mathfrak{p} & \text{hvis } \mathfrak{p}_i \subseteq \mathfrak{p}, \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

Det er klart, at $M_\mathfrak{p} \neq 0$, hvis og kun hvis mindst en af kvotienterne $(F_i)_\mathfrak{p}/(F_{i-1})_\mathfrak{p}$ er forskellig fra 0. Af udregningen ovenfor fremgår, at dette indtræffer, hvis og kun hvis $\mathfrak{p}$ indeholder et af $\mathfrak{p}_i$'erne. Altså er $\mathfrak{p}$ element i støtten $\operatorname{Supp} M$, hvis og kun hvis $\mathfrak{p}$ indeholder et af $\mathfrak{p}_i$'erne. Heraf følger den anden inklusion i (2). Desuden følger det, at mængden af $\mathfrak{p}_i$'er og mængden af primidealer i støtten har de samme minimale elementer.

Det skal endelig godtgøres, at mængden af $\mathfrak{p}_i$'er og mængden af associerede primidealer for M har de samme minimale elementer. Da den første mængde omfatter den anden, er det hertil nok at vise, at hvert $\mathfrak{p}_i$ indeholder et associeret primideal for M. Denne sidste påstand følger af Sætning (2.1), idet hvert $\mathfrak{p}_i$ tilhører støtten for M.

(3) Antag nu, at $\mathfrak{p}$ er et minimalt primideal for M. Da $\mathfrak{p}_i$'erne tilhører støtten for M, er det så udelukket, at $\mathfrak{p}_i \subset \mathfrak{p}$. Det fremgår derfor af udregningen ovenfor, at kvotienten $(F_i)_\mathfrak{p}/(F_{i-1})_\mathfrak{p}$ er forskellig fra 0 præcis når $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{p}$. Yderligere ses, at når kvotienten er forskellig fra 0, så er den isomorf med $R_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$. Denne sidste kvotient er netop den lokale ring $R_\mathfrak{p}$ modulo maksimalidealet $\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$. I den fremkomne filtration af $M_\mathfrak{p}$ er kvotienterne, der er forskellige fra 0, altså simple $R_\mathfrak{p}$-moduler. Følgelig har $M_\mathfrak{p}$ endelig længde, og da antallet af simple kvotienter netop var antallet af i'er for hvilke $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{p}$, følger påstanden. □

(2.4) Bemærkning. Af Filtrationssætningen følger for en endeligt frembragt modul M, at der kun er endelig mange associerede primidealer, og dermed specielt kun endelig mange minimale primidealer. Associerede primidealer, der ikke er minimale, siges også at være *indlejrede primidealer* for M.

(2.5) Korollar. *Lad M være en endeligt frembragt R-modul. Da er følgende betingelser ækvivalente:*

(i) *Modulen M har endelig længde.*

(ii) *Alle primidealer i støtten* Supp M *er maksimalidealer.*
(iii) *Alle primidealer, der omfatter* Ann M*, er maksimalidealer.*

Er disse betingelser opfyldt, så består støtten for M af endelig mange maksimalidealer $\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_q$, og afbildningen, som afbilder $x \in M$ på q-sættet med brøken $x/1$ i $M_{\mathfrak{m}_j}$ på den j'te plads, er en isomorfi,

$$M \xrightarrow{\sim} M_{\mathfrak{m}_1} \times \cdots \times M_{\mathfrak{m}_q}.$$

Bevis. Betingelserne (ii) og (iii) er ækvivalente ifølge (1.5).

At M har endelig længde betyder, at der i M findes en filtration,

$$(0) = F_0 \subseteq F_1 \subseteq \cdots \subseteq F_n = M, \tag{$*$}$$

hvor de successive kvotienter F_i/F_{i-1} er simple moduler, dvs isomorfe med kvotienter $R/\mathfrak{p}_i$ hvor $\mathfrak{p}_i$'erne er maksimalidealer i R. Hvis (i) er opfyldt, findes altså en filtration som i Filtrationssætningen, hvor $\mathfrak{p}_i$'erne er maksimalidealer. Da ethvert primideal i støtten indeholder et af disse $\mathfrak{p}_i$'er, må hvert primideal i støtten være lig med et af disse $\mathfrak{p}_i$'er. Altså gælder (ii), og yderligere ses, at støtten består af disse endelig mange maksimalidealer.

Antag omvendt, at (ii) gælder, og betragt en filtration af M som i Filtrationssætningen. De tilsvarende $\mathfrak{p}_i$'er tilhører støtten for M, så af antagelsen følger, at $\mathfrak{p}_i$'erne er maksimalidealer. Den betragtede filtration har derfor simple kvotienter. Følgelig har M endelig længde, dvs (i) er opfyldt.

Antag nu at betingelserne er opfyldt, altså at der findes en filtration ($*$) med kvotienter $F_i/F_{i-1} = R/\mathfrak{p}_i$, hvor $\mathfrak{p}_i$'erne er maksimalidealer. Betragt den angivne afbildning. Den er øjensynlig R-lineær.

Først vises, at afbildningen er injektiv. Lad y være et element i kernen, og antag, at $y \neq 0$. Det følger da af Sætning (2.1), at annullatoren $\mathrm{Ann}(y)$ er indeholdt i et associeret primideal til M. De associerede primidealer er netop $\mathfrak{m}_j$'erne, så $\mathrm{Ann}(y)$ er indeholdt i et af $\mathfrak{m}_j$'erne. Men dette strider mod at $y/1 = 0$ i $M_{\mathfrak{m}_j}$ for alle j. Altså er $y = 0$. Følgelig er afbildningen injektiv.

Dernæst vises for hvert maksimalideal $\mathfrak{m}$ i støtten for M, at brøkmodulen $M_{\mathfrak{m}}$, der ifølge Filtrationssætningen er en $R_{\mathfrak{m}}$-modul af endelig længde, også er af endelig længde (og endda af samme længde) som R-modul. Denne påstand følger af, at der ved lokalisering i $\mathfrak{m}$ fremkommer en filtration i $M_{\mathfrak{m}}$ hvor kvotienterne forskellige fra 0 er af formen $R_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}R_{\mathfrak{m}}$. Da $\mathfrak{m}$ er et maksimalideal i R, er den sidste kvotient ifølge Lokaliseringsprincippet isomorf med $R/\mathfrak{m}$, så kvotienterne er simple som R-moduler.

Nu kan bijektiviteten af afbildningen vises ved et længde-argument. Længden af venstresiden er længden af M, altså lig med n, hvor n er antallet af kvotienter i filtrationen. På den anden side er $\mathfrak{m}_j$'erne netop de forskellige blandt $\mathfrak{p}_i$'erne, så af Filtrationssætningen følger, at tallet n netop er summen af længderne long $M_{\mathfrak{m}_j}$. Altså har homomorfiens venstre- og højreside samme længde. Da homomorfien er injektiv, følger det at den er en isomorfi. ∎

(2.6) Opgaver.

U7 **1.** Antag, at R er noethersk og M er endeligt frembragt. Lad $\mathfrak{q}_1, \dots, \mathfrak{q}_q$ være de associerede primidealer for M (i en vilkårlig given rækkefølge). Vis, at der findes en filtration $(0) =$

$F_0 \subseteq F_1 \subseteq \cdots \subseteq F_n = M$, hvor de successive kvotienter har formen $R/\mathfrak{p}_i$ med primidealer $\mathfrak{p}_i$ således, at $\mathfrak{p}_j = \mathfrak{q}_j$ for $j = 1, \ldots, q$.

2. Lad M være en endeligt frembragt R-modul. Vis, at hvis $\operatorname{Ann} M$ er et primideal $\mathfrak{p}$, så er $\mathfrak{p}$ associeret til M. [Vink: Hvis $e_1, \ldots, e_n$ frembringer M, så er $\mathfrak{p} = \operatorname{Ann}(e_1) \cap \cdots \cap \operatorname{Ann}(e_n)$.]

3. Antag, at M er en endeligt frembragt R-modul. Vis, at hvert primideal associeret til $R/\operatorname{Ann} M$ er associeret til M. [Vink: Lad $r \in R$ og lad $\bar{r}$ være restklassen af r modulo $\operatorname{Ann} M$. Vis, at $\operatorname{Ann}(\bar{r}) = \operatorname{Ann}(rM)$.

U7 **4.** Lad M være en endeligt frembragt modul over en noethersk ring R, og lad $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ være de associerede primidealer. Vis, at den naturlige homomorfi $M \to M_{\mathfrak{p}_1} \times \cdots \times M_{\mathfrak{p}_n}$ er injektiv. [Vink: Overvej, at intet primideal kan være associeret til homomorfiens kerne.]