Ekstra opgaver

1. Bestem, for polynomiumsringen i $m+k$ variable, en isomorfi,

$$R[X_1,\dots,X_m,Y_1,\dots,Y_k]/(Y_1,\dots,Y_k) \xrightarrow{\sim} R[X_1,\dots,X_m].$$

2. Betragt en korteksakt følge $0 \to K \to M \to L \to 0$. Antag, at K og L er frie moduler. Vis, at M er fri. [Vink: „løft" elementerne fra en basis for L til elementer i M, og suppler med (billederne af) en basis for K. Vis, at der herved fremkommer en basis for M.]

3. Antag, at R er et PID. Vis, at enhver undermodul $K \subseteq R^n$ er fri, og at der for rangen, dvs elementantallet i en basis, gælder rk $K \leqslant n$.

4. Vis for et ideal $\mathfrak{a} \subseteq R$, at delmængden $\mathrm{Rad}(\mathfrak{a})$ faktisk er et ideal i R, og at $\mathfrak{a} \subseteq \mathrm{Rad}(\mathfrak{a})$. Vis, at for et primideal $\mathfrak{p}$ er $\mathrm{Rad}(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}$; og mere generelt: $\mathrm{Rad}(\mathfrak{p}^n) = \mathfrak{p}$ for $n \geqslant 1$.

5. Vis for et ideal $\mathfrak{a}$ i R og en modul M, at mængden $\mathfrak{a}M$, af alle summer af produkter ax for $a \in \mathfrak{a}$ og $x \in M$, er en undermodul. Vis (og præciser), at kvotienten $M/\mathfrak{a}M$ naturligt er en $R/\mathfrak{a}$-modul.

6. Lad $\mathfrak{a}$ være et ideal. Vis, at hvis følgen $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ er eksakt, så er også følgen $M'/\mathfrak{a}M' \to M/\mathfrak{a}M \to M''/\mathfrak{a}M'' \to 0$ eksakt. Manglede pilen $0 \to M'/\mathfrak{a}M'$ i den sidste følge?

7. Lad p være et primtal og lad M være en endelig kommutativ gruppe (additivt skrevet). Vis, at M/pM naturligt er et vektorrum over $\mathbb{F}_p$. Vis, at vektorrumsdimensionen af M/pM er „relateret" til de cykliske grupper af primtalspotensorden, der indgår i M ifølge Struktursætningen for endelige kommutative grupper.

8. Hvornår er $M \to S^{-1}M$ injektiv? Kan det indtræffe, at $M \to S^{-1}M$ er en isomorfi?

9. Lad p være et primtal. Brøkringene $\mathbb{Z}_{(p)}$ og $\mathbb{Z}[1/p]$ er delringe af $\mathbb{Q}$. Bestem fællesmængden $\mathbb{Z}_{(p)} \cap \mathbb{Z}[1/p]$.

10. Vis, at hvis $\mathfrak{a}$ er en fællesmængde af primidealer, så er $\mathfrak{a} = \mathrm{Rad}(\mathfrak{a})$.

11. Vis, at en endelig fællesmængde $\mathfrak{p}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_r$ af primidealer kun kan være et primideal, hvis et $\mathfrak{p}_i$ er indeholdt i de øvrige.

12. Vis, at hvis en familie af primidealer $\mathfrak{p}_i$, $i \in I$, er totalt ordnet (dvs, at for alle i, j er $\mathfrak{p}_i \subseteq \mathfrak{p}_j$ eller $\mathfrak{p}_j \subseteq \mathfrak{p}_i$), så er fællesmængden $\bigcap_i \mathfrak{p}_i$ igen et primideal.

13. Vis, at de lineære afbildninger $e\colon R^n \to M$ er afbildningerne af formen $e(x) = (e_1,\dots,e_n)$ svarende til et sæt af n elementer $e_1,\dots,e_n$ i R-modulen M.

Vis, at sættet $(e_1,\dots,e_n)$ er et frembringersystem for M, hvis og kun hvis $e\colon R^n \to M$ er surjektiv. Sættet $(e_1,\dots,e_n)$ er *lineært uafhængigt*, hvis den eneste *lineære relation* $x_1e_1 + \cdots + x_ne_n = 0$ er den *trivielle*, hvor $x_1 = \cdots = x_n = 0$. Vis, at sættet er lineært uafhængigt, hvis og kun hvis $e\colon R^n \to M$ er injektiv. Vis, at sættet er en basis for M, hvis og kun $e\colon R^n \to M$ er en isomorfi.

14. Det er et fundamentalt resultat i lineær algebra, at en lineær afbildning $\alpha\colon R^d \to R^d$ er injektiv, hvis og kun hvis determinanten $\det(\alpha)$ ikke er en nuldivisor, dvs hvis og kun hvis multiplikation med $\det(\alpha)$ er en injektiv afbildning $R \to R$. Vis, at „hvis" følger af Cramer's formler. Det generelle resultat er ikke så let at eftervise. Vis resultatet for integritetsområder R. Vis, ved hjælp af resultatet, at en lineær afbildning $R^n \to R^d$ kun kan være injektiv når $n \leqslant d$ (eller når R er nulringen).

Ved *rangen* af en modul M, betegnet $\operatorname{rk} M$, forstås det største antal elementer, der kan være i et lineært uafhængigt system i M. Ved *frembringerdimensionen*, betegnet $\dim_{\text{gen}} M$, forstås det mindste antal elemeneter, der kan være i et frembringersystem for M. [Bemærk, at notationen $\dim_{\text{gen}} M$ ikke er en standardnotation.] Vis, ved hjælp af resultatet, at der generelt gælder $\operatorname{rk} M \leqslant \dim_{\text{gen}} M$. Vis yderligere, at hvis M er endeligt frembragt, så er M fri, hvis og kun hvis $\operatorname{rk} M = \dim_{\text{gen}} M$.

15. Lad R være et integritetsområde med brøklegeme $K := R_{(0)}$. Vis for enhver R-modul M, at $\operatorname{rk} M = \dim M_{(0)}$, hvor dimensionen er dimensionen som vektorrum over K.

16. Vis, at $\operatorname{Rad}(0)$ er delmængden bestående af alle nilpotente elementer i R. *Vis, at

$$\operatorname{Rad}(0) = \bigcap \mathfrak{p},$$

hvor højresiden er fællesmængden af alle primidealer i R. [Vink: For at vise inklusionen „$\supseteq$" skal det vises, at hvis f ikke er nilpotent, så findes et primideal $\mathfrak{p}$ med $f \notin \mathfrak{p}$. Anvend hertil eksistensen af et primideal (endda et maksimalideal) i ringen R_f.]

17. Lad I være en mængde. Betragt ringen $R := \mathbb{F}_2^I$ af alle funktioner $I \to \mathbb{F}_2$. Vis, at ved $f \mapsto f^{-1}(0)$ bestemmes en bijektiv afbildning af R på mængden af alle delmængder af I; den inverse afbildning knytter til en delmængde $F \subseteq I$ den karakteristiske funktion for komplementærmængden til F. Herved svarer delmængder $\mathfrak{a} \subseteq R$ til systemer af delmængder $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(I)$. Vis, at $\mathfrak{a} \subseteq R$ er et ægte ideal, hvis og kun hvis $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(I)$ er et *filter på I*, dvs opfylder følgende: (1) $G \supseteq F \in \mathcal{F} \implies G \in \mathcal{F}$, og (2) $F_1, F_2 \in \mathcal{F} \implies F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$, og (3) $\mathcal{F} \neq \emptyset$ og $\emptyset \notin \mathcal{F}$. Vis, at følgende betingelser er ækvivalente: (i) $\mathfrak{a}$ er et primideal, (ii)$\mathcal{F}$ er et *ultrafilter*, dvs et filter som opfylder, at for enhver delmængde F af I gælder: $F \in \mathcal{F} \vee \complement F \in \mathcal{F}$, (iv) Filtret $\mathcal{F}$ er maksimalt blandt filtre, (iv) $\mathfrak{a}$ er et maksimalideal.

18. Betragt ringen $R := \mathbb{F}_2^{\mathbb{N}}$ af alle følger $\alpha\colon \mathbb{N} \to \mathbb{F}_2$. Vis, at delmængden $\mathfrak{a} \subseteq R$ bestående af de følger, der er 0 fra et vist trin, er et ægte ideal i R. Kan du bestemme et maksimalideal $\mathfrak{m}$ med $\mathfrak{m} \supseteq \mathfrak{a}$?

19. Bestem en kæde af tre primidealer $\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \mathfrak{p}_2$ i ringen $\mathbb{Q}[X, Y]$. –Og i ringen $\mathbb{Z}[X]$.

20. Vis, at de cykliske moduler $R/\mathfrak{a}$ og $R/\mathfrak{b}$ er isomorfe, hvis og kun hvis idealerne $\mathfrak{a}$ og $\mathfrak{b}$ er det samme: $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$. [Vink: Overvej, hvordan du ud fra R-modulen $R/\mathfrak{a}$ kan bestemme idealet $\mathfrak{a}$.]

21. Lad p være et primtal. Brøkringene $\mathbb{Z}_{(p)}$ og $\mathbb{Z}[1/p]$ er delringe af $\mathbb{Q}$. Bestem fællesmængden $\mathbb{Z}_{(p)} \cap \mathbb{Z}[1/p]$.

22. Vis, at en endelig fællesmængde $\mathfrak{p}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_r$ af primidealer kun kan være et primideal, hvis et $\mathfrak{p}_i$ er indeholdt i de øvrige.

23. Vis for hvert n-sæt $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ i k^n, at idealet $\mathfrak{m}_\alpha := (X_1 - \alpha_1, \dots, X_n - \alpha_n)$ består af de polynomier $f \in k[X_1, \dots, X_n]$ for hvilke $f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0$. Vis, når k er et legeme, at $\mathfrak{m}_\alpha$ er et maksimalideal.

24. Antag, at k er et uendeligt legeme. Vis, at hvis $f \in k[X_1, \dots, X_n]$ ikke er nul-polynomiet, så findes et $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in k^n$ med $f(\alpha) \neq 0$.

25. Antag, at $x \in R$ er nilpotent. Vis, at så er $1 + x$ invertibel i R.

26. Antag, at R er et PID, og at $a = p_1^{\nu_1} \cdots p_r^{\nu_r}$ er en primopløsning. Bestem længden af R-modulen $R/(a)$.

27. En partielt ordnet mængde $(\mathcal{M}, \preceq)$ kaldes *noethersk ordnet*, hvis der i enhver stigende kæde $x_1 \preceq x_2 \preceq x_3 \preceq \cdots$ gælder „=" fra et vist trin. Formuler en ækvivalent „maksimalitetsbetingelse". Ordningen kaldes *artinsk*, hvis den modsatte ordning er noethersk. Antag, at ordningen er både noethersk og artinsk. Vis, at så findes der i $\mathcal{M}$ en kæde $x_0 \prec x_1 \prec \cdots x_{n-1} \prec x_n$, som er *uforfinelig* i den forstand, at x_0 er minimalt element i $\mathcal{M}$, x_n er maksimalt element i $\mathcal{M}$ og for hvert i findes der intet element x med $x_{i-1} \prec x \prec x_i$. I almindelighed kan man ikke slutte, at der så er en øvre grænse for antallet at elementer i en uforfinelig kæde. Hvilket resultat kan man udlede, når $\mathcal{M}$ er mængden af undermoduler af en given modul M?

28. Lad $\mathfrak{a}$ og $\mathfrak{b}$ være idealer i R, og lad $S \subseteq R$ være en multiplikativ delmængde. Vis, at $S^{-1}(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = S^{-1}\mathfrak{a} \cap S^{-1}\mathfrak{b}$.

29. Betragt R-homomorfier $\varphi\colon M \to N$ og $\psi\colon N \to P$. Vis, at $\operatorname{Ker}\varphi \subseteq \operatorname{Ker}\psi\varphi$ og at ψ inducerer en surjektiv homomorfi $\varphi(M) \to \psi\varphi(M)$. Vis, at $\operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Ker}\psi\varphi$, hvis og kun hvis den inducerede homomorfi er en isomorfi $\psi\colon \varphi(M) \to \psi\varphi(M)$.

Vis, at hvis M er noethersk, så er enhver surjektiv homomorfi $M \to M$ automatisk en isomorfi.

30. Lad der være givet en filtration $0 = F_0 \subseteq F_1 \subseteq \cdots \subseteq F_n = M$ i M med cykliske kvotienter $F_i/F_{i-1} = R/\mathfrak{a}_i$ for $i = 1, \dots, n$. Vis, at produktet $\mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_n$ er indeholdt i annullatoren $\operatorname{Ann} M$.

31. Antag, at R er et PID og ikke et legeme. Lad M være en endeligt frembragt R-modul. Vis, at M har endelig længde, hvis og kun hvis $\operatorname{Ann} M \neq (0)$.

32. Vis, at enhver noethersk modul $M \neq 0$ har en simpel kvotientmodul.

33. To af de egenskaber, der karakteriserer noetherske moduler ved deres undermoduler, hedder, henholdvis, „den opstigende kædes egenskab", og „maksimalitetsegenskaben". Præciser hvilke! Formuler tilsvarende „den nedstigende kædes egenskab" og „minimalitetsegenskaben", og vis at de to sidste egenskaber er ækvivalente. En modul, der har de to egenskaber, kaldes *artinsk*. Vis, at enhver artinsk modul har en simpel undermodul.

34. Vis, at en R-modul M har endelig længde, hvis og kun hvis M er både noethersk og artinsk.

35. Lad p være et primtal, og lad $C_{p^\infty} \subset \mathbb{C}^*$ være foreningsmængden af undergrupperne:

$$(*) \qquad C_1 \subset C_p \subset C_{p^2} \subset \cdots ,$$

Vis, at C_{p^∞} er en gruppe, og at undergrupperne i $(*)$ er de eneste ægte undergrupper af C_{p^∞}. Vis, at C_{p^∞} er artinsk som $\mathbb{Z}$-modul.

36. Vis, for et primtal p, at $M := \mathbb{Z}[1/p]/\mathbb{Z}$ er artinsk som $\mathbb{Z}$-modul. [Vink 1: Vis, at undergrupperne $\mathbb{Z}(1/p)^n/\mathbb{Z}$ for $n = 0, 1, 2, \dots$ er de eneste ægte undergrupper af M. Eller Vink 2: Vis, at M er relateret til gruppen C_{p^∞}.]

37. Antag, at nul-idealet er et produkt af maksimalidealer, $(0) = \mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_r$. Vis, at så er følgende betingelser er ækvivalente: (i) R er noethersk; (ii) R er artinsk; (iii) R har endelig længde. [Vink: I filtrationen af R bestemt ved $F_i := \mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_i$ har hver af de successive kvotienter formen $F/\mathfrak{m}F$; specielt er hver kvotient en modul over en kvotientring $R/\mathfrak{m}$, altså et vektorrum. Brug nu, at for vektorrum er de tre betingelser trivielt ækvivalente.]

38. Vis, at R (som modul over sig selv) er artinsk, hvis og kun hvis R har endelig længde. [Vink: Antag, at R er artinsk. Det er nok at vise, at (0) er produkt af maksimalidealer. Vælg $\mathfrak{d}$ minimalt blandt de idealer, der er produkter af maksimalidealer, og sæt $\mathfrak{a} = \operatorname{Ann} \mathfrak{d}$. Så er $\mathfrak{a}$ det største ideal med $\mathfrak{a}\mathfrak{d} = 0$. Antag, indirekte, at $\mathfrak{d} \neq (0)$. Så er $1 \notin \mathfrak{a}$, og kvotienten $R/\mathfrak{a}$ er ikke nul. Slut heraf, at $R/\mathfrak{a}$ har en simpel undermodul, svarende til et ideal $\mathfrak{b}$ med $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$ og $\mathfrak{b}/\mathfrak{a} = R/\mathfrak{m}$. Nu er $\mathfrak{m}\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}$, og dermed er $\mathfrak{m}\mathfrak{b}\mathfrak{d} = 0$. Øjensynlig er $\mathfrak{m}\mathfrak{d} \subseteq \mathfrak{d}$ er produkt af maksimal idealer, så valget af $\mathfrak{d}$ sikrer, at $\mathfrak{m}\mathfrak{d} = \mathfrak{d}$. Altså er $\mathfrak{b}\mathfrak{d} = (0)$, men da $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$ er det er i modstrid med definitionen af $\mathfrak{a}$.

39. Vis, at en endeligt frembragt R-modul er artinsk, hvis og kun hvis den har endelig længde.

40. Gennemfør følgende bevis for Noether's Normaliseringslemma. Lad $A := k[a_1, \dots, a_m]$ være den givne algebra. Antag, at der findes en egentlig relation $F(a_1, \dots, a_m) = 0$, hvor F ikke er nul-polynomiet. Betragt et sæt af $m - 1$ skalarer $\lambda_1, \dots, \lambda_{m-1} \in k$, og sæt

$$b_i := a_i - \lambda_i a_m \quad \text{for } i = 1, \dots, m-1.$$

Det skal vises, at skalarerne kan vælges sådan, at a_m er hel over $k[b_1, \dots, b_{m-1}]$ (thi så bliver $k[a_1, \dots, a_m]$ hel over $k[b_1, \dots, b_{m-1}]$). Lad d være graden af F, og altså $F = F_d + \cdots + F_1 + F_0$, hvor F_i er homogen af grad d. Vi har $a_i = b_i + \lambda_i a_m$, og altså ligningen,

$$F(b_1 + \lambda_1 a_m, \dots, b_{m-1} + \lambda_{m-1} a_m, a_m) = 0.$$

Ordnes efter potenser af a_m fås en ligning af grad højst d i a_m, og koefficienten til a_m^d kommer fra F_d. Det bliver en skalar:

$$0 = F(b_1 + \lambda_1 a_m, \dots, b_{m-1} + \lambda_{m-1} a_m, a_m) = F_d(\lambda_1, \dots, \lambda_{m-1}, 1) a_m^d + \dots.$$

Nu var $F_d(X_1, \dots, X_m)$ homogent og ikke nul-polynomiet, og så er $F_d(X_1, \dots, X_{m-1}, 1)$ ikke nul-polynomiet. Vælg nu skalarerne sådan, at koefficienten $F_d(\lambda_1, \dots, \lambda_{m-1}, 1) \neq 0$. Division med denne koefficient giver så en „helhelds“-relation for a_m over $k[b_1, \dots, b_{m-1}]$.

Den væsentlige fordel ved dette bevis er, at den givne algebra bliver hel over algebraisk uafhængige elementer, der er *linearkombinationer* af de givne $a_1, \dots, a_m$. Ulempen er, at beviset kun fungerer, når legemet k er undeligt. Hvorfor denne sidste indskrænkning?

41. Beskriv $\operatorname{Ann} M$, $\operatorname{Supp} M$ og $\operatorname{Ass} M$ for $\mathbb{Z}$-modulen $M = \mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$. Og for $M = \mathbb{Z}$.

42. Vis, at en potensrække $f = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots \in k[X]$ er invertibel, når blot a_0 er invertibel i k. Vis, at når k er et legeme, så er $k[[X]]$ en lokal ring, og et PID. [Vink: Vis, at idealet (0) og idealerne (X^i) for $i = 0, 1, \dots$ er samtlige idealer.]

43. Betragt polynomiumsringen $G = R[X_1, \dots, X_n]$. Vis, for idealet $\mathfrak{M} = (X_1, \dots, X_n)$ i G, at $G/\mathfrak{M} = R$. Lad G_d være undergruppen af homogene polynomier af grad d. Det er en fri R-modul, der som basis har monomierne af grad d. Vis, at $G_d \subseteq \mathfrak{M}^d$. Vis, at $\mathfrak{M}^d/\mathfrak{M}^{d+1}$ er en modul over $G/\mathfrak{M} = R$. Beskriv $\mathfrak{M}^d$, og bestem en naturlig R-lineær isomorfi $\mathfrak{M}^d = G_d \oplus \mathfrak{M}^{d+1}$. Udled heraf en R-isomorfi $G_d \xrightarrow{\sim} \mathfrak{M}^d/\mathfrak{M}^{d+1}$.

44. Betragt en ringhomomorfi $R \to R'$ og for idealer $\mathfrak{a} \subseteq R$ og $\mathfrak{a}' \subseteq R'$ *extension* $R'\mathfrak{a}$ og *kontraktion* $R \cap \mathfrak{a}'$. Vis, at $\mathfrak{a} \subseteq R \cap R'\mathfrak{a}$ og at $R'(R \cap \mathfrak{a}') \subseteq \mathfrak{a}'$. Vis, at hvis $\mathfrak{a}$ er en kontraktion, så er $\mathfrak{a} = R \cap R'\mathfrak{a}$, og hvis $\mathfrak{a}'$ er en extension, så er $\mathfrak{a}' = R'(R \cap \mathfrak{a}')$.

45. Lad $\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_n$ være idealer i R. Bestem annullatoren for R-modulen $R/\mathfrak{a}_1 \oplus \cdots \oplus R/\mathfrak{a}_n$.

46. Mængden af primidealer i ringen R kaldes ringens *primspektrum* og betegnes $\operatorname{Spec} R$. Hvornår er primspektret tomt? Beskriv primspektret for et legeme. Bestem for kommutative ringe R_1 og R_2 en naturlig bijektiv afbildning $\operatorname{Spec}(R_1 \times R_2) = \operatorname{Spec} R_1 \vee \operatorname{Spec} R_2$, hvor højresiden er den disjunkte forening af de to mængder.

47. Vis for en R-modul M og $a \in R$, at $(a)M = aM$ (hvor $aM := \{ ax \mid x \in M \}$).

48. Betragt ringen $\mathbb{Z}$ og heri et tal $n > 1$. Vis, at mængden $S = \{ s \mid (s, n) = 1 \}$ er en multiplikativ delmængde af $\mathbb{Z}$. Beskriv primidealerne i brøkringen $S^{-1}\mathbb{Z}$, og de tilsvarende primidealer i $\mathbb{Z}$.

49. Lad M være en R-modul, og betragt den direkte sum $R \oplus M$. Vis, at med kompositionen $(r, x)(s, y) = (rs, ry + sx)$ som multiplikation er $R \oplus M$ en kommutativ ring. (Tænker man på (r, x) som $r + x$, er multiplikationen bestemt ved $xy = 0$.) Antag, at $R = k$ er et legeme. Vis, at $k \oplus M$ en lokal ring med kun ét primideal. Hvornår er $k \oplus M$ noethersk?, – artinsk?, – af endelig længde?

50. Vis, at en R-modul M er fri, hvis og kun hvis M har en endelig filtration, hvor alle de successive kvotienter er isomorfe med R.

51. Et element x i R-modulen M kaldes et *torsionselement*, hvis der findes en skalar r, der ikke er nuldivisor i R, således, at $rx = 0$. Vis, at torsionselementerne i M udgør en undermodul M_{tors} af M og at kvotientmodulen M/M_{tors} er „torsionsfri".

52. Vis, at en R-lineær afbildning $\varphi\colon M \to Q$ er injektiv (henh. surjektiv, henh. bijektiv), hvis og kun hvis $\varphi_{\mathfrak{p}}\colon M_{\mathfrak{p}} \to Q_{\mathfrak{p}}$ er injektiv (henh. surjektiv, henh. bijektiv) for alle primidealer $\mathfrak{p}$ i R.

53. Antag, at $\mathfrak{q}$ er et $\mathfrak{p}$-primært ideal i R. Vis for idealer $\mathfrak{a}$ og $\mathfrak{b}$, at hvis $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{q}$ og $\mathfrak{a} \not\subseteq \mathfrak{q}$, så er $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$.

54. Antag, at R er et PID. Antag, at $a \in R$ har primopløsningen $a = up_1^{\nu_1} \cdots p_r^{\nu_r}$, hvor $u \in R^*$ og elementerne $p_1, \dots, p_n$ er ikke-associerede. Bestem $\operatorname{Rad}(a)$. Bestem de primære idealer i R.

55. Antag, at R er et integritetsområde og at $p \in R$ er et primelement, dvs at $p \neq 0$ og hovedidealet (p) er et primideal. Vis, at potenserne (p^m), hvor $m \geqslant 1$, er (p)-primære idealer.

56. Antag, at R er noethersk og M er endeligt frembragt. Lad $\mathfrak{q}_1, \dots, \mathfrak{q}_q$ være de associerede primidealer for M (i en vilkårlig given rækkefølge). Vis, at der findes en filtration $(0) = F_0 \subseteq F_1 \subseteq \cdots \subseteq F_n = M$, hvor de successive kvotienter har formen $R/\mathfrak{p}_i$ med primidealer $\mathfrak{p}_i$ således, at $\mathfrak{p}_j = \mathfrak{q}_j$ for $j = 1, \dots, q$.

57. Antag, at R er et PID. Vis, at hvis M er en endeligt frembragt *torsionsfri* R-modul (dvs $\operatorname{Ann}(x) = (0)$ for $x \neq 0$), så er M fri. [Vink: Lokaliseringen $R_{(0)}$ er brøklegemet for R. Vis, at homomorfien $M \to M_{(0)}$ er injektiv, og benyt det til at vise, at M er undermodul i en fri modul. Slut så til sidst, at M må være fri.]

58. Antag, at $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$ er primidealer, og sæt $M := R/\mathfrak{p} \oplus R/\mathfrak{q}$. Bestem $\operatorname{Ann} M$ og $\operatorname{Ass} M$. Find en modul N som opfylder $\operatorname{Ann} M = \operatorname{Ann} N$ men $\operatorname{Ass} M \supset \operatorname{Ass} N$.

59. Betragt polynomiumsringen $R = k[X, Y]$, hvor k er et legeme, og idealet $\mathfrak{m} = (X, Y)$ som R-modul. Vis, at $\operatorname{Ass}(\mathfrak{m}) = \{(0)\}$. Vis, at i følgende filtration af $\mathfrak{m}$,

$$(0) \subset (Y) \subset (X^2, Y) \subset (X, Y) = \mathfrak{m}$$

har de successive kvotienter formen $R/\mathfrak{p}_i$ med primidealer $\mathfrak{p}_i$. Vis, at i enhver filtration af $\mathfrak{m}$, hvor de successive kvotienter er af denne form, vil der forekomme primidealer ud over primidealet (0). [Vink: i modsat fald ville $\mathfrak{m}$ være en fri R-modul, hvad der ikke kan være tilfældet; eller: Overvej, at der må være mere end 1 kvotient, og at antallet af gange $R/(0)$ forekommer er lig med 1.]

60. Lad M være en endeligt frembragt R-modul. Vis, at hvis $\operatorname{Ann} M$ er et primideal $\mathfrak{p}$, så er $\mathfrak{p}$ associeret til M. [Vink: Hvis $e_1, \dots, e_n$ frembringer M, så er $\mathfrak{p} = \operatorname{Ann}(e_1) \cap \cdots \cap \operatorname{Ann}(e_n)$.]

61. Antag, at M er en endeligt frembragt R-modul. Vis, at hvert primideal associeret til $R/\operatorname{Ann} M$ er associeret til M. [Vink: Lad $r \in R$ og lad $\bar{r}$ være restklassen af r modulo $\operatorname{Ann} M$. Vis, at $\operatorname{Ann}(\bar{r}) = \operatorname{Ann}(rM)$.

62. Lad M være en endeligt frembragt modul over en noethersk ring R, og lad $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n$ være de associerede primidealer. Vis, at den naturlige homomorfi $M \to M_{\mathfrak{p}_1} \times \cdots \times M_{\mathfrak{p}_n}$ er injektiv. [Vink: Overvej, at intet primideal kan være associeret til homomorfiens kerne.]

63. Betragt polynomiumsringen $R = k[X, Y, Z]$, hvor k er et legeme. Vis, at idealerne $\mathfrak{m} = (X, Y, Z)$, $\mathfrak{p} = (X, Z)$ og $\mathfrak{q} = (Y, Z)$ er primidealer. Vis for $M := R/\mathfrak{p}\mathfrak{q}$, at $\operatorname{Ass} M = \{\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \mathfrak{m}\}$. Vis, at den naturlige homomorfi $M \to M_{\mathfrak{p}} \times M_{\mathfrak{q}}$ ikke er injektiv.

64. Lad R være en noethersk ring. Vis, at R er et endeligt produkt af integritetsområder, hvis og kun hvis $R_{\mathfrak{m}}$ er et integritetsområde for alle maksimalidealer $\mathfrak{m}$ (og dermed for alle primidealer $\mathfrak{m}$). [Vink til „hvis": Vis først, at $\operatorname{Rad}(0) = (0)$ og udled, at $(0) = \mathfrak{p}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_n$, hvor fremstillingen kan antages uforkortelig. Vis dernæst, at den naturlige ringhomomorfi $R \to R/\mathfrak{p}_1 \times \cdots \times R/\mathfrak{p}_n$ er en isomorfi (lokaliser i $\mathfrak{m}$!).]

65. Vis i $\mathbb{Z}[X]$, at idealet $\mathfrak{m} := (2, X)$ er et maksimalideal og at idealet $(4, X)$ er $\mathfrak{m}$-primært og ikke en potens af $\mathfrak{m}$.

66. Lad der være givet en endelig mængde af primidealer $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n$ i R. Angiv en modul M for hvilken $\operatorname{Ass} M = \{\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n\}$.

67. *For et ideal $\mathfrak{a}$ i R betegnes med $\mathfrak{a}[X]$ extensionen af $\mathfrak{a}$ til $R[X]$. Vis, at hvis $\mathfrak{p}$ er et primideal i R, så er $\mathfrak{p}[X]$ et primideal i $R[X]$. Vis, at hvis $\mathfrak{q}$ er et $\mathfrak{p}$-primært ideal i R, så er $\mathfrak{q}[X]$ et $\mathfrak{p}[X]$-primært ideal i $R[X]$.

68. Antag, at R er noethersk og M er endeligt frembragt. Betragt følgende *betingelse* på M: nuldivisorerne på M udgør et ideal. Vis, at hvis N er en primær undermodul af M, så er betingelsen opfyldt for M/N. Vis, at hvis betingelsen er opfyldt, så udgør nuldivisorerne et associeret primideal. Vis, at hvis $N \subseteq M$ er en irreducibel undermodul, så er betingelsen opfyldt for M/N. [Vink til det sidste: vis det indirekte!]

69. Betragt i $R = k[X, Y]$ (hvor k er et legeme) maksimalidealet $\mathfrak{m} = (X, Y)$. Gør rede for, at $\mathfrak{m}^2 = (X^2, XY, Y^2)$ er $\mathfrak{m}$-primært. Vis, at $\mathfrak{m}^2$ ikke er irreducibelt. [Vink: Vis, at $\mathfrak{m}$ er en fællesmængde af $\mathfrak{a}_1$ og $\mathfrak{a}_2$, hvor $\mathfrak{a}_1 = (X^2, Y)$ og . . . .]

70. Vis, at delringen $R := \mathbb{Z}[2X, X^2, X^3]$ af $\mathbb{Z}[X]$ består af de polynomier $f = a_0 + a_1X + \cdots$, hvor koefficienten a_1 (altså koefficienten til X) er lige. Vis at idealet $\mathfrak{p}$, bestående af de polynomier $f \in R$ for hvilke $f(0) = 0$, er et primideal, og vis, at $\mathfrak{p} = (2X, X^2, X^3)$. Vis, at idealet $\mathfrak{p}^2$ ikke er $\mathfrak{p}$-primært. [Vink: $\mathfrak{p}^2 = (4X, 2X^2, 2X^3, X^4, X^5, X^6)$, og $4X^2 \in \mathfrak{p}^2$, men $4 \notin \mathfrak{p}$ og $X^2 \notin \mathfrak{p}^2$.]

71. Betragt i $R = k[X, Y]$ (hvor k er et legeme) idealerne $\mathfrak{p} = (X)$ og $\mathfrak{m} = (X, Y)$. Vis, at $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{m}$ er primidealer. Sæt $\mathfrak{a} := \mathfrak{p}\mathfrak{m}$. Vis, at $\operatorname{Rad}(\mathfrak{a})$ er primidealet $\mathfrak{p}$ og at $\mathfrak{a}$ ikke er $\mathfrak{p}$-primært.

72. Betragt i $k[X, Y]$ (hvor k er et legeme) idealerne $\mathfrak{p} = (X)$, $\mathfrak{m} = (X, Y)$, $\mathfrak{q} = (X^2, Y)$, og $\mathfrak{a} := \mathfrak{p}\mathfrak{m}$. Vis, at $\mathfrak{a} = (X^2, XY)$. Vis, at $\mathfrak{q}$ er $\mathfrak{m}$-primært. Eftervis følgende ligninger: $\mathfrak{a} = \mathfrak{p} \cap \mathfrak{m}^2 = \mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}$, og vis, at begge bestemmer uforkortelige primærdekompositioner af $\mathfrak{a}$.

73. Lad M være en endeligt frembragt R-modul og lad $\mathfrak{a}$ være et ideal således, at der for alle $x \neq 0$ i M er $\mathfrak{a}x \subset Rx$. Vis, at hvis $M \neq 0$, så er $\mathfrak{a}M \subset M$. [Vink: Indirekte, som i beviset for Nakayama's Lemma; brug, at en ligning $(1 - a)e = 0$, med $a \in \mathfrak{a}$ og $e \in M$ medfører, at $e = 0$.

74. Antag, at R er noethersk og M er endeligt frembragt. Lad $\mathfrak{a}$ være et ideal i R, og betragt undermodulen $N := \bigcap \mathfrak{a}^n M$ i M. Vis, at $N = \mathfrak{a}N$, idet følgende påstande skal eftervises: Da $\mathfrak{a}N \subseteq N$, er det nok at vise, at for hver primær undermodul Q af M med $\mathfrak{a}N \subseteq Q$ er $N \subseteq Q$. Antag hertil, indirekte, at der findes $x \in N$ med $x \notin Q$, og betragt restklassen $\bar{x} \in M/Q$. Da er $\mathfrak{a} \subseteq \operatorname{Ann}(\bar{x})$. Da M/Q er primær, følger det, at hvert $a \in \mathfrak{a}$ har en potens, der annullerer M/Q. Derfor findes en eksponent k således, at $\mathfrak{a}^k M \subseteq Q$. Da $N \subseteq \mathfrak{a}^k M$, følger det at $N \subseteq Q$, – som ønsket.

75. Lad k være et legeme, og lad $A := k^{\mathbb{N}}$ være ringen af alle følger $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ med $\alpha_i \in k$. Vis, at de følger, der er konstante fra et vist trin, udgør en delring R af A. For en følge (α_i) i R betegnes med α_∞ følgens konstante værdi α_j for $j \gg 0$. Vis, for hvert $i = 1, 2, \dots, \infty$, at følgerne $\alpha \in R$ med $\alpha_i = 0$ udgør et maksimalideal $\mathfrak{m}_i$ i R, og at disse idealer er samtlige primidealer i R. [Vink: Lad $\mathfrak{p}$ være et primideal i R. Betragt, for $i = 1, 2, \dots$, hovedidealet (δ_i) i R (hvor δ_i er Kronecker's delta, $\delta_{ij} = 1$ når $j = i$ og $\delta_{ij} = 0$ når $j \neq i$). Udnyt, at $(\delta_i)\mathfrak{m}_i = (0) \subseteq \mathfrak{p}$.]

Vis, at de følger, der kun antager endelig mange værdier, udgør en delring R' af A [Så $R' = A$, hvis k er et endeligt legeme]. Vis, at R' er den hele afslutning af R i A. Kan du bestemme et maksimalideal i R', der ligger over $\mathfrak{m}_i$? – Også for $i = \infty$?

76. Betragt i polynomiumsringen $k[T]$ (k er et legeme) polynomierne $x = T^2$ og $y = T^3$, og delalgebraen $k[x, y]$ af $k[T]$. Vis, at kernen for den naturlige homomorfi $k[X, Y] \to k[x, y]$ (bestemt ved $f \mapsto f(x, y)$) er idealet $\mathfrak{p} := (X^3 - Y^2)$. [Vink: Regn modulo det sidste ideal, dvs at man i monomier kan erstatte X^3 med Y^2 (og omvendt). For hvert $f \in k[X, Y]$ har vi så en kongruens, $f \equiv f_0(X) + f_1(X)Y$ med polynomier $f_0, f_1 \in k[X]$. Det er klart, at $\mathfrak{p}$ er indeholdt i kernen. Antag omvendt, at f tilhører kernen. Så følger det, at $f_0(x) + f_1(x)y = 0$, altså $f_0(T^2) + f_1(T^2)T^3 = 0$, og så må f_0 og f_1 være nul, og altså $f \equiv 0$, dvs $f \in (X^3 - Y^2)$.]

77. *Betragt i polynomiumsringen $k[T]$ (k er et legeme) polynomierne $x = T^2$, $y = T^3$ og $z = T^4$, og delalgebraen $k[x, y, z]$ af $k[T]$. Vis, at kernen for den naturlige homomorfi $k[X, Y, Z] \to k[x, y, z]$ er idealet $\mathfrak{p} := (Y^2 - XZ, X^3 - YZ, X^2Y - Z^2)$. [Vink: Regn modulo det sidste ideal, og vis, at for hvert $f \in k[X, Y, Z]$ er der en kongruens

$$f \equiv X^2 f_1(Z) + XYf_2(Z) + Xf_3(Z) + Yf_4(Z) + f_5(Z) \pmod{\mathfrak{p}}.$$

Det er klart, at kernen omfatter $\mathfrak{p}$. Omvendt, hvis f ligger i kernen, så fås $T^6 f_1(T^5) + T^7 f_2(T^5) + T^3 f_3(T^5) + T^4 f_4(T^5) + f_5(T^5)$, og heraf følger $f_1 = f_2 = f_3 = f_4 = f_5 = 0$, og altså $f \in \mathfrak{p}$.]

78. Antag, at R er et PID. Antag, at Q er en R-modul frembragt af e, f, og at der findes en lineær relation $ae + bf = 0$ med $a \neq 0$. Lad d være største fælles divisor for a, b. Vis, at der findes $x, y \in R$ således, at $ax + by = d$, og at der så gælder: elementerne $\hat{e} = (a/d)e + (b/d)f$ og $\hat{f} = -ye + xf$ frembringer Q og $d\hat{e} = 0$.

Antag, at M er en endeligt frembragt torsionsfri R-modul (dvs $\mathrm{Ann}(x) = (0)$ for $x \neq 0$). Vis, at M fri. [Vink: Vis, ved induktion efter n, at ethvert frembringersystem $e_1, \dots, e_n$ for M, hvor n er mindst mulig, er en basis.

79. Vis, at enhver surjektiv homomorfi $\alpha\colon R^n \to R^n$ er en isomorfi. [Vink: Vis, ved hjælp af Cramer's formler, at for kvadratiske matricer α, β medfører ligningen $\alpha\beta = 1$, at α er invertibel med β som den inverse.]

80. Lad M være en endeligt frembragt modul over en noethersk ring R. Vis, at M har endelig længde, hvis og kun hvis der findes endelig mange maksimalidealer $\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_n$ (ikke nødvendigvis forskellige) i R således, at $\mathfrak{m}_1 \cdots \mathfrak{m}_n M = 0$.

Hvad udsiger resultatet, hvis R er lokal?

81. Ligningen $\mathrm{Ass}(M_1 \oplus M_2) = \mathrm{Ass}(M_1) \cup \mathrm{Ass}(M_2)$ er en konsekvens af Noether (1.7.2). Giv, ved at se på annullatorer for elementer (x_1, x_2) i $M_1 \oplus M_2$, et direkte bevis for ligningen.

82. Antag, at nuldivisorerne på M udgør et ideal $\mathfrak{q}$ i R. Vis, at så $\mathfrak{q}$ er et primideal. Vis, at hvis R er noethersk og M er endeligt frembragt, så er $\mathfrak{q}$ et associeret primideal for M.

83. I hvilke af følgende ringe udgør nuldivisorerne et ideal: $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/1$, $\mathbb{Z}/8$, $\mathbb{Z}/24$?

84. En ring R, hvori idealerne er totalt ordnede (dvs, at for vilkårlige to idealer $\mathfrak{a}$ og $\mathfrak{b}$ er enten $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}$ eller $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}$), kaldes en valuationsring. Vis, at i en valuationsring er ethvert endeligt frembragt ideal et hovedideal.

85. Bestem for $R = \mathbb{Z}$ og $\mathfrak{a} = (24)$ Hilbert–Samuel-polynomiet $\chi_{\mathfrak{a},M}$ for $M = \mathbb{Z}$. – Og for $M = \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$, og $M = \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ og $M = \mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$.

86. Lad N og M være moduler, og betragt inklusionen $i\colon N \to N \oplus M$ (bestemt ved $x \mapsto (x, 0)$ og projektionen $p\colon N \oplus M \to M$ bestemt ved $(x, y) \mapsto y$. Gør rede for, at følgen $0 \longrightarrow N \xrightarrow{i} N \oplus M \xrightarrow{p} M \longrightarrow 0$ er eksakt.

87. Betragt i R en multiplikativ delmængde S og et ideal $\mathfrak{a}$. Vis, at idealet $S^{-1}\mathfrak{a} \subseteq S^{-1}R$ er extensionen $\mathfrak{a}S^{-1}R$ af $\mathfrak{a}$ til $S^{-1}R$.

88. Betragt en kvadratisk talring $R = \mathbb{Z}[\xi]$, hvor ξ er rod i $f = X^2 + bX + c \in \mathbb{Z}[X]$. Bestem en isomorfi $\mathbb{Z}[X]/(f) \xrightarrow{\sim} R$. Udled for hvert primtal p en naturlig isomorfi $\mathbb{F}_p[X]/(f) \xrightarrow{\sim} R/(p)$, idet f opfattes som polynomium i $\mathbb{F}_p[X]$. Vis, at der er følgende tre muligheder: 1° (p) er et maksimalideal i R; 2° (p) er en fællesmængde $(p) = \mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{m}_2$ af to forskellige maksimalidealer; 3° (p) er et kvadrat $(p) = \mathfrak{m}^2$ på et maksimalideal. Vis, at de tre muligheder indtræffer, henholdsvis, når f i $\mathbb{F}_p$ har ingen rødder; to forskellige rødder; en dobbeltrod.

89. Betragt primidealer $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}$. Hvilken relation er der mellem $M_\mathfrak{q}$ og $M_\mathfrak{p}$?

90. Lad S være en multiplikativ delmængde af R. Vis, at homomorfien $M \to S^{-1}M$ er injektiv, hvis og kun hvis $Z_R(M) \cap S = \emptyset$, hvor $Z_R(M)$ er mængden af nuldivisorer på M.

91. Lad $\mathfrak{q}$ være et $\mathfrak{p}$-primært ideal i en noethersk ring R, og lad $S \subseteq R$ være en multiplikativ delmængde, disjunkt med $\mathfrak{p}$. Vis, at $\mathfrak{q}$ er kontraktionen af sin extension: $\mathfrak{q} = R \cap S^{-1}\mathfrak{q}$. [Vink: $R \cap S^{-1}\mathfrak{q}$ er kernen for den sammensatte homomorfi $R \to R/\mathfrak{q} \to S^{-1}(R/\mathfrak{q})$.]

92. Lad $f\colon M \to N$ være en homomorfi mellem moduler, der har den samme endelige længde. Vis, at følgende betingelser er ækvivalente: (i) f er surjektiv; (ii) f er injektiv; (iii) f er en isomorfi.

93. Antag, at R er lokal med maksimalideal $\mathfrak{m}$. Vis, at hvis idealet $\mathfrak{m}$ er endeligt frembragt, så er enten $\mathfrak{m}^k = (0)$ for et (passende stort) k, eller også er $\mathfrak{m}^n \supset \mathfrak{m}^{n+1}$ for alle n. Vis, at hvis den første mulighed indtræffer, så er $\mathfrak{m}$ det eneste primideal i R.

94. Lad φ være en endomofi i modulen M, dvs en lineær afbildning $\varphi\colon M \to M$. Vis, at kæden af kerner er stigende: $\operatorname{Ker}\varphi \subseteq \operatorname{Ker}\varphi^2 \subseteq \operatorname{Ker}\varphi^3 \subseteq \cdots$, og at kæden af billeder er dalende: $\varphi M \supseteq \varphi^2 M \supseteq \varphi^3 M \supseteq \cdots$. Vis, at der findes et kommutativt diagram med exakte rækker,

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \operatorname{Ker}\varphi^n \arrow[r] \arrow[d, "\text{inkl.}"'] & M \arrow[r, "\varphi^n"] \arrow[d, "="'] & \varphi^n M \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Ker}\varphi^{n+1} \arrow[r] & M \arrow[r, "\varphi^{n+1}"] & \varphi^{n+1} M \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Slut heraf, at $\operatorname{Ker}\varphi^n = \operatorname{Ker}\varphi^{n+1}$, hvis og kun hvis restriktionen $\varphi\colon \varphi^n M \to \varphi^n M$ er injektiv. Antag nu, at (mindst) et af billederne $\varphi^i M$ har endelig længde. Vis, at når $n \gg 0$, så er restiktionen $\varphi\colon \varphi^n M \to \varphi^n M$ bijektiv og $M = \operatorname{Ker}\varphi^n \oplus \varphi^n M$.

95. Lad $\theta\colon R \to R'$ være en ringhomomorfi, og lad S være en multiplikativ delmængde af R. Brøkmodulen $S^{-1}R'$ kan som bekendt identificeres med brøkringen $\theta(S)^{-1}R'$, og homomorfien $S^{-1}R \to S^{-1}R'$ er en ringhomomorfi. Vis, at hvis R' er hel over R, så er $S^{-1}R'$ hel over $S^{-1}R$.

96. Lad $\mathfrak{a} \subseteq R$ være et ideal, og lad M være en R-modul. Vis, at $\operatorname{Supp}(M/\mathfrak{a}M) \subseteq \operatorname{Supp} M \cap \operatorname{Supp}(R/\mathfrak{a})$, og at lighed gælder, når M er endeligt frembragt. [Vink: Brug Nakayama's Lemma.]

97. Den adjugerede til en 2×2-matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ er matricen $\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. I matricen $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$ står tallene for deres restklasser modulo 24. Bestem den inverse matrix.

98. Eftervis formlen $\binom{n+r}{p} = \sum_{i+j=p} \binom{n}{i}\binom{r}{j}$. [Vink: brug binomialformlen på $(1+x)^{n+r} = (1+x)^n(1+x)^r$.] Udtryk binomialkoefficienten $\binom{n+r}{r}$ som linearkombination af binomialkoefficienterne $\binom{n}{i}$ for $i = 0, 1, \dots, r$.

99. I $R := k[X,Y]$ betragtes primidealerne $\mathfrak{q} = (0)$, $\mathfrak{p} := (Y)$ og $\mathfrak{m} := (X,Y)$, og kvotienten $M := R/\mathfrak{p}$ som R-modul. Bestem brøkmodulerne $M_{\mathfrak{q}}$, $M_{\mathfrak{p}}$, og $M_{\mathfrak{m}}$, og deres Krull-dimensioner.

100. Vis i ringen $R := \mathbb{Z}_{(5)}$, at idealet (0) og potenserne (5^n) for $n = 0, 1, 2, \dots$ er samtlige idealer.

101. Antag, at R er et integritetsområde. Vis, at et ikke-konstant polynomium $f \in R[X]$ ikke kan være helt over R. Antag, at k er et legeme, og at $f_1, \dots, f_r$ er polynomier i $k[T]$. Hvad kan du sige om dimensionen af $k[f_1, \dots, f_r]$?