5. Dimension af endeligt frembragte algebraer over legemer.

(5.1) Setup. I denne paragraf betegner k et legeme. Den noetherske ring R vil typisk være en endeligt frembragt algebra over k, eller, ækvivalent, R vil være en kvotient af polynomiumsringen $k[X_1, \dots, X_n]$ modulo et ideal.

(5.2) Nøglelemma. *Antag, at R er et integritetsområde, endeligt frembragt som algebra over k. Lad $\mathfrak{p}$ være et primideal i R. Antag, at $\mathfrak{p}$ er isoleret primideal for et hovedideal $Rf \neq (0)$. Da gælder ligningen,*

$$\operatorname{tdeg}_k(R/\mathfrak{p}) = \operatorname{tdeg}_k R - 1. \tag{5.2.1}$$

Bevis. Ideen i beviset er følgende: Først vises nøglelemmaet i specialtilfældet, hvor R er polynomiumsringen $k[X_1, \dots, X_n]$. Dernæst reduceres den almindelige påstand til specialtilfældet ved hjælp af Noether's Normaliseringslemma: Algebraen R er hel over en delring R_0, som er en polynomiumsring. Lad $\mathfrak{p}_0 = R_0 \cap \mathfrak{p}$. Da R er hel over R_0 har R og R_0 samme transcendensgrad over k. Af samme grund har $R/\mathfrak{p}$ og $R_0/\mathfrak{p}_0$ samme transcendensgrad. Ligningen (5.2.1) gælder altså for R og $\mathfrak{p}$, hvis og kun hvis den gælder for R_0 og $\mathfrak{p}_0$. Da påstanden er vist for polynomiumsringen R_0, skal det altså vises, at når $\mathfrak{p}$ er isoleret primideal for et hovedideal $Rf \neq (0)$, så er $\mathfrak{p}_0$ isoleret primideal for et hovedideal $R_0 f_0 \neq (0)$. Denne sidste påstand er det ikke så nemt at vise direkte. Vi går en omvej: Først vises, at det er nok at bevise ligning (5.2.1) når $\mathfrak{p}$ har egenskaben, at det er det eneste isolerede primideal for et hovedideal forskelligt fra (0). Dernæst vises, at hvis $\mathfrak{p}$ har denne egenskab, så har $\mathfrak{p}_0$ den også.

Disse enkelte skridt gennemføres i følgende 3 lemmaer. Når de er vist, er Nøglelemmaet altså bevist. □

(5.3) Lemma. *Påstanden i Nøglelemmaet gælder, hvis $R := k[X_1, \dots, X_n]$ er polynomiumsringen.*

Bevis. Antag nemlig, at $\mathfrak{p}$ er isoleret primideal for et hovedideal $Rf \neq (0)$. Polynomiet f kan ikke være konstant. Skriv f som produkt af irreducible polynomier p_i. Da f tilhører $\mathfrak{p}$, vil en af de irreducible faktorer p_i tilhøre $\mathfrak{p}$. Altså er $Rf \subseteq Rp_i \subseteq \mathfrak{p}$. Da $\mathfrak{p}$ forudsættes at være isoleret primideal for Rf, følger det, at $\mathfrak{p} = Rp_i$. Forudsætningen medfører altså, at $\mathfrak{p}$ er et hovedideal frembragt af et irreducibelt polynomium p.

Polynomiet p kan ikke være konstant, så vi kan antage, at fx den variable X_n forekommer i p. Det er nok at vise, at de $n-1$ restklasser x_i af X_i modulo Rp for $i = 1, \dots, n-1$ er algebraisk uafhængige over k. Antag hertil, at der findes en algebraisk relation $F(x_1, \dots, x_{n-1}) = 0$, hvor F er et polynomium i $n-1$ variable. Vi slutter så, at $F(X_1, \dots, X_{n-1})$ tilhører idealet Rp, altså at der findes en ligning,

$$F(X_1, \dots, X_{n-1}) = hp,$$

med et polynomium h i $k[X_1, \dots, X_n]$. Den variable X_n forekommer i polynomiet p, men ikke på ligningens venstreside. Heraf sluttes, at venstresiden må være nul-polynomiet. Følgelig er $x_1, \dots, x_{n-1}$ algebraisk uafhængige. □

(5.4) Lemma. *Det er nok at bevise, at påstanden i Nøglelemmaet gælder, når* $\mathfrak{p}$ *er det eneste isolerede primideal for et hovedideal* $Rf \neq (0)$.

Bevis. Antag nemlig, at der yderligere findes r isolerede primidealer $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_r$ for hovedidealet Rf. Da er intet af $\mathfrak{p}_i$'erne indeholdt i $\mathfrak{p}$. Følgelig er fællesmængden af $\mathfrak{p}_i$'erne ikke indeholdt i $\mathfrak{p}$. Altså findes et element g i R således at $g \in \mathfrak{p}_i$ og $g \notin \mathfrak{p}$. Betragt brøkringen $R' := R_g$. Den er en endeligt frembragt algebra over k, da $R' = R[1/g]$. Da $g \notin \mathfrak{p}$ er ekstensionen $\mathfrak{p}' := \mathfrak{p}R'$ et primideal i R'. Ringen R' er en lokalisering af R, og de to ringe har derfor samme transcendensgrad. Kvotientringen $R'/\mathfrak{p}'$ er ifølge Lokaliseringsprincippet en lokalisering af kvotientringen $R/\mathfrak{p}$, og de to kvotientringe har derfor samme transcendensgrad over k. Heraf ses, at ligningen i Nøglelemmaet gælder for R og $\mathfrak{p}$, hvis og kun hvis den gælder for R' og $\mathfrak{p}'$. Det er let at se, at valget af g sikrer, at $\mathfrak{p}'$ er det eneste isolerede primideal for hovedidealet $R'f$. Hermed er påstanden bevist. □

(5.5) Lemma. *Antag, at* R *er et integritetsområde og helt over en delring* R_0*, som er en polynomiumsring over* k. *Lad* $\mathfrak{p}$ *være et primideal i* R*, som har egenskaben, at* $\mathfrak{p}$ *er det eneste isolerede primideal for et hovedideal forskelligt fra* (0). *Da har kontraktionen* $\mathfrak{p}_0 := R_0 \cap \mathfrak{p}$ *den samme egenskab.*

Bevis. Bemærk først, at $\mathfrak{p}$ er det eneste isolerede primideal for hovedidealet Rf, hvis og kun hvis $\mathfrak{p} = \mathrm{Rad}(Rf)$. Dette følger af, at radikalet som bekendt er lig med fællesmængden af alle primidealer, som omfatter Rf.

Antag nu, at primidealet $\mathfrak{p}$ har egenskaben, altså at

$$\mathfrak{p} = \mathrm{Rad}(Rf) \quad \text{hvor } f \neq 0.$$

Ringen R er antaget hel over delringen R_0, så brøklegemet for R er algebraisk over brøklegemet for R_0. Betragt det minimale polynomium polynomium for f over brøklegemet for R_0:

$$F = X^m + f_{m-1}X^{m-1} + \cdots + f_1X + f_0.$$

A priori er koefficienterne f_j elementer i brøklegemet for R_0. Det påstås, at alle kofficienterne tilhører R_0. Hertil bemærkes, at polynomiet F i et passende stort legeme kan faktoriseres: $F = (X - \alpha_1)\cdots(X - \alpha_m)$. Da R er hel over R_0 er f rod i et normeret polynomium med koefficienter i R_0. Dette polynomium har det minimale polynomium som divisor, og det har derfor hvert α_i som rod. Altså er hvert α_i helt over R_0. Koefficienterne f_j er summer af produkter af α_i'erne. Derfor er koefficienterne f_j hele over R_0. Desuden tilhører de brøklegemet for R_0. Da R_0 er polynomiumsringen over et legeme, og dermed en faktoriel ring, følger det endelig, at koefficienterne f_j tilhører R_0.

Da $f \neq 0$, er $f_0 \neq 0$. Lemmaet er derfor vist, når vi har bevist ligningen,

$$\mathfrak{p}_0 = \mathrm{Rad}(R_0 f_0). \tag{5.5.1}$$

Højresiden i denne ligning er indeholdt i venstresiden. Det er nemlig hertil nok at vise, at $f_0 \in \mathfrak{p}_0$. Ifølge antagelsen er $f \in \mathfrak{p}$ og af ligningen,

$$F(f) = f^m + f_1 f^{m-1} + \cdots + f_1 f + f_0 = 0,$$

følger specielt, at $f_0 \in Rf \subseteq \mathfrak{p}$. Altså er $f_0 \in R_0 \cap \mathfrak{p} = \mathfrak{p}_0$.

Betragt omvendt et element a_0 på venstresiden, altså $a_0 \in \mathfrak{p}_0$. Det skal vises, at a_0 har en potens, der tilhører $R_0 f_0$. Nu var $a_0 \in \mathfrak{p}_0 \subseteq \mathfrak{p}$ og $\mathfrak{p} = \operatorname{Rad}(Rf)$. Elementet a_0 har derfor en potens, der tilhører idealet Rf. Idet vi kan erstatte a_0 med denne potens, kan vi antage, at a_0 tilhører Rf. Der findes altså en ligning,

$$a_0 = gf, \quad \text{hvor } g \in R.$$

Lad nu G være det minimale polynomium for a_0/f over brøklegemet for R_0. Da $a_0 \in R_0$, bestemmes G ud fra det minimale polynomium F for f ved ligningen,

$$G(X) = \frac{1}{f_0} X^m F(a_0/X).$$

På den anden side var $a_0/f = g$ element i R, og a_0/f er derfor hel over R_0. Polynomiet G har derfor koefficienter i R_0. Specielt er konstantleddet a_0^m/f_0 element i R_0. Altså er $a_0^m \in R_0 f_0$, og følgelig tilhører a_0 højresiden i (5.5.1). Hermed er ligning (5.5.1) eftervist og beviset for lemmaet afsluttet. □

(5.6) Dimensionsformlen. *Antag, at R er en endeligt frembragt k-algebra, og equidimensional. Lad $\mathfrak{p}$ være et primideal i R. Da gælder formlen,*

$$\operatorname{ht} \mathfrak{p} + \operatorname{tdeg}_k R/\mathfrak{p} = \dim R. \tag{5.6.1}$$

Bevis. Som nævnt i slutningen af (4.15) er det nok at betragte tilfældet, hvor R er et integritetsområde. Betragt en kæde af primidealer i R,

$$(0) = \mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_h = \mathfrak{p}, \tag{*}$$

og sæt $R_i := R/\mathfrak{p}_i$. For $i < h$ er R_{i+1} så kvotienten af R_i modulo primidealet $\mathfrak{p}_{i+1}/\mathfrak{p}_i$. Heraf følger som bekendt, at $\operatorname{tdeg}_k R_{i+1} < \operatorname{tdeg}_k R_i$. Da transcendensgrader er ikke-negative følger det specielt, at $h \leqslant \operatorname{tdeg}_k R$. Altså er dimensionen endelig, $\dim R \leqslant \operatorname{tdeg}_k R$.

Antag nu, at kæden (*) er uforfinelig. I ringen R_i, for $i < h$, findes da ingen primidealer mellem $\mathfrak{p}_{i+1}/\mathfrak{p}_i$ og primidealet (0). Primidealet $\mathfrak{p}_{i+1}/\mathfrak{p}_i$ er derfor isoleret for hovedidealet frembragt at et vilkårligt af sine elementer forskellige fra 0. Af Nøglelemma'et sluttes derfor, at $\operatorname{tdeg}_k R_{i+1} = \operatorname{tdeg}_k R_i - 1$. Heraf ses, at

$$\operatorname{tdeg}_k R_h = \operatorname{tdeg}_k R - h.$$

Dette resultat anvendes først med $\mathfrak{p}$ lig med et maksimalideal i R. I dette tilfælde følger det af Hilbert's Nulpunktssætning, at legemet $R/\mathfrak{p}$ er af transcendensgrad 0 over k. Altså er i dette tilfælde $h = \operatorname{tdeg}_k R$. I R gælder altså, at enhver uforfinelig kæder af primidealer fra (0) til et maksimalideal indeholder $\operatorname{tdeg}_k R$ skarpe inklusionstegn. Transcendensgraden $\operatorname{tdeg}_k R$ er altså lig med dimensionen af R og også lig med den fælles højde af maksimalidealerne i R.

Betragt nu et vilkårligt primideal $\mathfrak{p}$ i R og en uforfinelig kæde af primidealer (*). Supplér med en uforfinelig kæde af primidealer,

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}'_0 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}'_l,$$

således at $\mathfrak{p}'_l$ er et maksimalideal. Af det lige viste, anvendt på R og på $R/\mathfrak{p}$, følger, at $h + l = \operatorname{tdeg}_k R = \dim R$ og $l = \operatorname{tdeg}_k(R/\mathfrak{p})$. Altså er

$$h + \operatorname{tdeg}_k R/\mathfrak{p} = \dim R.$$

Da kæden (*) var en vilkårlig uforfinelig kæde, følger heraf dimensionsformlen (5.6.1). $\square$

(5.7) Bemærkning. Som nævnt i (4.15) medfører Dimensionsformlen alle de tidligere viste resultater om polynomiumsringen $k[X_1, \ldots, X_n]$. Specielt følger det, at polynomiumsringen er bi-equidimensional (og specielt katernær).