

Dimensionsteori

1. Krull-dimension.

(1.1) Bemærkning. Dimensionen, $\dim P$, af en partielt ordnet mængde $(P, <)$ kan defineres som det største antal skarpe ulighedstegn i en kæde $p_0 < p_1 < \cdots < p_h$ af elementer fra P . Hvis der ikke findes en øvre grænse for antallet af ulighedstegn, sættes $\dim P := \infty$. Det er en konvention, at den tomme mængde tillægges dimensionen $-\infty$, og den medregnes blandt de partielt ordnede mængder af endelig dimension (dvs af dimension mindre end ∞). Med denne konvention betyder $\dim P = 0$, at P ikke er tom og at to forskellige elementer i P ikke kan sammenlignes.

For eksempel kan længden af R -modul M defineres som dimensionen af den partielt ordnede mængde af undermoduler i M .

(1.2) Definition. Ved *Krull-dimensionen*, i det følgende blot kaldet *dimensionen*, af en R -modul M forstås dimensionen,

$$\dim M := \dim \text{Supp } M,$$

hvor støtten $\text{Supp } M$, bestående af primidealer \mathfrak{p} i R således at $M_{\mathfrak{p}} \neq 0$, er partielt ordnet ved sædvanlig inklusion. Dimensionen er med andre ord det største antal skarpe inklusionstegn i en kæde af primidealer i støtten for M :

$$\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_h. \quad (1.2.1)$$

Et primideal \mathfrak{p} tilhører som bekendt støtten $\text{Supp } M$, hvis og kun hvis der findes et element x i M , således at $\mathfrak{p} \supseteq \text{Ann}(x)$. Specielt gælder, når \mathfrak{p} tilhører støtten for M og \mathfrak{q} er et primideal der omfatter \mathfrak{p} , at også \mathfrak{q} tilhører støtten for M . Det er således i (1.2.1) nok at kræve, at $\mathfrak{p}_0 \in \text{Supp } M$.

For nul-modulen er støtten tom, så nul-modulen har ifølge konventionen fra (1.1) dimensionen $-\infty$. En modul $M \neq 0$ har som bekendt en ikke-tom støtte, og dermed er $\dim M \geq 0$. Ligningen $\dim M = 0$ udtrykker øjensynlig, at $M \neq 0$ og at ethvert primideal i støtten for M er et maksimalideal.

Dimensionen af R som R -modul kaldes også *Krull-dimensionen* af ringen R .

(1.3) Bemærkning. Lad \mathfrak{a} være et ideal i R . Kvotienten R/\mathfrak{a} kan da opfattes som en ring og som en R -modul. Mere generelt kan en kvotient $M/\mathfrak{a}M$ opfattes både som modul over R og som modul over R/\mathfrak{a} . Dimensionen af $M/\mathfrak{a}M$ er uafhængig heraf. Det er nemlig

30. marts 2007

klart, at hvert primideal i støtten for R -modulen $M/\mathfrak{a}M$ vil omfatte \mathfrak{a} . Primidealer \mathfrak{p} , der omfatter \mathfrak{a} , svarer ifølge Kvotientprincippet til samtlige primidealer i R/\mathfrak{a} , og der findes en isomorfi $(M/\mathfrak{a}M)_{\mathfrak{p}} \simeq (M/\mathfrak{a}M)_{\mathfrak{p}/\mathfrak{a}}$. Heraf ses, at når $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a}$, så vil \mathfrak{p} tilhøre støtten for R -modulen $M/\mathfrak{a}M$, hvis og kun hvis primidealet $\mathfrak{p}/\mathfrak{a}$ tilhører støtten for R/\mathfrak{a} -modulen $M/\mathfrak{a}M$. Kæder af primidealer (1.2.1) i støtten for R -modulen $M/\mathfrak{a}M$ svarer altså bijektivt til kæder af primidealer i støtten for R/\mathfrak{a} -modulen $M/\mathfrak{a}M$. Heraf følger, at de to dimensioner er den samme.

Et tilsvarende resultat ikke gælder for brøkmoduler. Hvis S er en multiplikativ delmængde af R , så er brøkmodulen $S^{-1}M$ en modul over brøkringen $S^{-1}R$, og $S^{-1}M$ kan derfor specielt opfattes som R -modul. Primidealene i brøkringen $S^{-1}R$ svarer ifølge Lokaliseringsprincippet bijektivt til primidealer \mathfrak{p} der er disjunkte med S , og der findes en isomorfi $(S^{-1}M)_{S^{-1}\mathfrak{p}} = M_{\mathfrak{p}}$. Støtten for $S^{-1}R$ -modulen $S^{-1}M$ kan derfor identificeres med den delmængde af støtten for R -modulen M , der består af primidealer disjunkte med S , og dimensionen af $S^{-1}R$ -modulen $S^{-1}M$ er altså dimensionen af denne delmængde. Men det skal understreges, at det også for primidealer \mathfrak{p} , der ikke er disjunkte med S , kan indtræffe, at $(S^{-1}M)_{\mathfrak{p}} \neq 0$, altså at \mathfrak{p} tilhører støtten for R -modulen $S^{-1}M$. Med mindre andet udtrykkeligt er fremhævet, vil vi ved dimensionen af en brøkmodul $S^{-1}M$ altid forstå dens dimension over brøkringen $S^{-1}R$.

(1.4) Observation. For enhver R -modul M gælder uligheden $\dim M \leq \dim R$, idet støtten for M er en delmængde af mængden af primidealer i R . Tilsvarende gælder for en undermodul M' i M og kvotienten $M'' = M/M'$, at $\dim M' \leq \dim M$ og $\dim M'' \leq \dim M$, idet både M' og M'' har støtte indeholdt i støtten for M . Yderligere gælder ligningerne,

$$\dim M = \sup_{\mathfrak{p} \in \text{Supp } M} \dim R/\mathfrak{p} = \sup_{\mathfrak{p}} \dim M_{\mathfrak{p}},$$

hvor det sidste supremum fx tages over alle primidealer (eller maksimalidealer) (i $\text{Supp } M$). Den første lighed indses således: Dimensionen af M er supremum af de tal h , for hvilke der findes en kæde (1.2.1) med $\mathfrak{p}_0 \in \text{Supp } M$, eller omskrevet, supremum over $\mathfrak{p} \in \text{Supp } M$ af supremum af de tal h for hvilke der findes en kæde (1.2.1) med $\mathfrak{p}_0 = \mathfrak{p}$. Når \mathfrak{p} er givet, så svarer kæder (1.2.1) med $\mathfrak{p}_0 = \mathfrak{p}$ ifølge Kvotientprincippet bijektivt til kæder af primidealer i kvotienten R/\mathfrak{p} . Heraf følger den påståede lighed.

At dimensionen af M også er bestemt ved det andet supremum indses tilsvarende: Da hvert primideal er indeholdt i et maksimalideal, er det klart, at vi i definitionen på $\dim M$ kun behøver at betragte kæder (1.2.1), hvor \mathfrak{p}_i tilhører støtten for M og $\mathfrak{p}_h = \mathfrak{m}$ er et maksimalideal. Videre er det klart, at vi i supremum kun behøver at medregne bidrag svarende til primidealer \mathfrak{p} med $M_{\mathfrak{p}} \neq 0$, idet de øvrige primidealer \mathfrak{p} kun bidrager med $\dim M_{\mathfrak{p}} = -\infty$ til supremum. Det følger af definitionen, at dimensionen af M er supremum over primidealer \mathfrak{p} i $\text{Supp } M$ af supremum af de tal h , for hvilke der findes en kæde (1.2.1) af primidealer i $\text{Supp } M$ med $\mathfrak{p}_h = \mathfrak{p}$. Når \mathfrak{p} er givet, så svarer sådanne kæder ifølge Lokaliseringsprincippet bijektivt til kæder af primidealer støtten for $M_{\mathfrak{p}}$ (som modul over den lokale ring $R_{\mathfrak{p}}$), som ender med maksimalidealet $\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$. Heraf følger den anden lighed.

For $M = R$ udsiger de to ligheder, at

$$\dim R = \sup \dim R/\mathfrak{p} = \sup \dim R_{\mathfrak{p}}.$$

Lad M være en endeligt frembragt R -modul. Da består støtten for M som bekendt af de primidealer, der omfatter annullatoren $\text{Ann } M$. I kæden (1.2.1) ligger primidealene \mathfrak{p}_i altså i støtten for M , netop hvis alle \mathfrak{p}_i 'erne omfatter $\text{Ann } M$. Sådanne kæder svarer altså bijektivt til kæder af primidealer i kvotientringen $R/\text{Ann } M$, og følgelig gælder ligningen,

$$\dim M = \dim(R/\text{Ann } M).$$

(1.5) Bemærkning. Dimensionen af en R -modul kan være ∞ . Den er naturligvis ∞ , hvis der i støtten for M findes en uendelig kæde $\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \dots$, eller en uendelig kæde $\mathfrak{p}_1 \supset \mathfrak{p}_2 \supset \dots$. Sådanne kæder findes ikke hvis ringen R er noethersk (det er klart, at der i en noethersk ring ikke findes uendelige kæder af den første type, og det vil fremgå af senere resultater, at der heller ikke findes uendelige kæder af den anden type). Men også for noetherske ringe kan dimensionen være ∞ , idet $\dim M = \infty$ kun betyder, at der findes vilkårligt lange kæder (1.2.1).

Antag, at dimensionen $\dim M$ er endelig. Da findes i støtten for M en kæde (1.2.1), hvor $h = \dim M$ er det maksimale antal skarpe inklusioner. Det er klart, at en sådan kæde er *maksimal* i den forstand, at \mathfrak{p}_0 er et minimalt primideal for M , \mathfrak{p}_h er et maksimalideal i R , og kæden (1.2.1) er uforfinelig: mellem to på hinanden følgende \mathfrak{p}_i 'er findes ingen primidealer. Det skal understreges, at der ikke gælder omvendt, at hvis en kæde (1.2.1) er maksimal i denne forstand, så er $h = \dim M$. Der findes et eksempel på en ring R , der er et noethersk, lokalt integritetsområde med to uforfinelige kæder af primidealer,

$$(0) \subset \mathfrak{p} \subset \mathfrak{m}, \quad (0) \subset \mathfrak{p}_1 \subset \mathfrak{p}_2 \subset \mathfrak{m}.$$

(1.6) Eksempel. Nul-ringen har dimension $-\infty$. Et legeme k har øjensynlig dimension 0. Ringen \mathbb{Z} har dimension 1, idet $(0) \subset (p)$, hvor p er et primtal, er den maksimalt opnåelige kæde af primidealer i \mathbb{Z} . Mere generelt gælder, at et hovedidealområde, der ikke er et legeme, er af dimension 1.

I polynomiumsringen $R = k[X_1, \dots, X_n]$ over et legeme k er kæden,

$$(0) \subset (X_1) \subset (X_1, X_2) \subset \dots \subset (X_1, \dots, X_n),$$

en kæde af primidealer i R . Heraf følger, at $\dim R \geq n$. På den anden side er det velkendt, at man ved at inddrage transcendensgrad kan vise, at ingen kæde af primidealer i R kan indeholde flere end n skarpe inklusioner. Der gælder altså ligheden $\dim R = n$.

(1.7) Definition. For et primideal \mathfrak{p} i R defineres *højden* af \mathfrak{p} som det største antal skarpe inklusioner i en kæde af primidealer,

$$\mathfrak{p}_0 \subset \dots \subset \mathfrak{p}_h = \mathfrak{p}. \tag{1.7.1}$$

30. marts 2007

Højden af \mathfrak{p} betegnes $\text{ht } \mathfrak{p}$. Højden af et primideal kan være ∞ , men den er altid ikke-negativ. At $\text{ht } \mathfrak{p} = 0$ betyder, at \mathfrak{p} er et minimalt primideal i R . Primidealer $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}$ svarer som bekendt bijektivt til samtlige primidealer i brøkringen $R_{\mathfrak{p}}$. Kæder (1.7.1) svarer derfor bijektivt til kæder af primidealer i $R_{\mathfrak{p}}$. Følgelig er $\text{ht } \mathfrak{p} = \dim R_{\mathfrak{p}}$.

Det er praktisk at definere højden af et vilkårligt ideal \mathfrak{a} som infimum af højderne af de primidealer, der omfatter \mathfrak{a} , altså

$$\text{ht } \mathfrak{a} = \inf_{\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a}} \text{ht } \mathfrak{p} = \inf_{\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a}} \dim R_{\mathfrak{p}}.$$

For det uægte ideal $\mathfrak{a} = R$ tages er infimum over den tomme mængde, og idealet R tillægges højden ∞ . Hvis \mathfrak{a} er et ægte ideal, findes der altid primidealer (endda maksimalidealer), der omfatter \mathfrak{a} , så infimum tages over en ikke-tom mængde. Men også her kan højden være ∞ , nemlig når alle primidealer, der omfatter \mathfrak{a} , har uendelig højde. Vi skal senere vise, at for noetherske ringe er højden af ægte idealer altid endelig.

(1.8) Observation. For et ægte ideal \mathfrak{a} i R gælder uligheden,

$$\text{ht } \mathfrak{a} + \dim R/\mathfrak{a} \leq \dim R.$$

Uligheden gælder trivielt, hvis højresiden er ∞ . Antag, at $\dim R < \infty$. Dimensionen af R/\mathfrak{a} bestemmes ved at betragte kæder af primidealer,

$$\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}'_0 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}'_k. \quad (1.8.1)$$

Da $\dim R < \infty$, er $\dim R/\mathfrak{a} < \infty$, så vi kan finde en kæde af primidealer (1.8.1), hvor $k = \dim R/\mathfrak{a}$. Da $\dim R < \infty$ er $\text{ht } \mathfrak{p}'_0 < \infty$, så vi kan finde en kæde af primidealer (1.7.1) med $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}'_0$, hvor $h = \text{ht } \mathfrak{p}'_0$. Da højden af \mathfrak{a} er et infimum, er $\text{ht } \mathfrak{a} \leq h$. Kombineres de to kæder (1.7.1) og (1.8.1) fås i R en kæde af primidealer med $h + k$ skarpe inklusioner. Altså har vi $\text{ht } \mathfrak{a} + \dim R/\mathfrak{a} \leq h + k \leq \dim R$, og dermed den søgte ulighed.

(1.9) Definition. Det er ofte bekvemt at generalisere definitionerne i (1.7) til moduler. For en R -modul M og et ideal \mathfrak{a} defineres *codimensionen*, $\text{codim } M$, og *M -højden*, $\text{ht}_M \mathfrak{a}$, ved ligningerne,

$$\text{codim } M := \inf_{\mathfrak{p} \in \text{Supp } M} \dim R_{\mathfrak{p}} \quad \text{og} \quad \text{ht}_M \mathfrak{a} := \inf_{\mathfrak{p} \in \text{Supp } M, \mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a}} \dim M_{\mathfrak{p}}.$$

Hvis M er endeligt frembragt, følger det af Nakayama's Lemma, at det sidste infimum ækvivalent kan tages over primidealer i støtten for $M/\mathfrak{a}M$. For et primideal \mathfrak{p} følger det let af definitionen, at $\text{ht}_M \mathfrak{p} = \dim M_{\mathfrak{p}}$.

Det er let at se, at $\text{codim } R/\mathfrak{a} = \text{ht } \mathfrak{a}$. Følgende to uligheder:

$$\begin{aligned} \text{codim } M + \dim M &\leq \dim R, \quad \text{når } M \neq 0, \\ \text{ht}_M \mathfrak{a} + \dim M/\mathfrak{a}M &\leq \dim M, \quad \text{når } \mathfrak{a}M \subset M, \end{aligned}$$

generaliserer begge uligheden i (1.8), og de vises ved et tilsvarende bevis.

(1.10) Definition. Lad M være en R -modul af endelig dimension, og antag $M \neq 0$. Som nævnt i (1.4) er $\dim M = \sup \dim R/\mathfrak{p}$, hvor supremum tages over primidealer i støtten for M . Da dimensionen er endelig, er supremum et maksimum, og det er klart, at den maksimale værdi $\dim R/\mathfrak{p}$ antages i et minimalt primideal \mathfrak{p} for M , dvs i et primideal \mathfrak{p} , der er minimalt i støtten for M . Hvis der for alle minimale primidealer \mathfrak{q} for M gælder, at $\dim R/\mathfrak{q} = \dim M$, siges M at være *equidimensional*. Bemærk, at en modul med kun ét minimalt primideal, specielt et integritetsområde opfattet som modul over sig selv, er equidimensional.

Tilsvarende er $\dim M = \sup \dim M_{\mathfrak{p}}$, og den maksimale værdi $\dim M_{\mathfrak{p}}$ antages i et maksimalideal i støtten for M . Hvis der for alle maksimalidealer \mathfrak{m} i støtten for M gælder, at $\dim M_{\mathfrak{m}} = \dim M$, siges M at være *co-equidimensional*. Bemærk, at en modul over en lokal ring er co-equidimensional.

Lad $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}$ være primidealer i støtten for M . Da dimensionen af M er endelig, findes der uforfinelige kæder,

$$\mathfrak{q} = \mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_h = \mathfrak{p}, \quad (*)$$

og endda sådanne kæder hvor $h = \text{ht } \mathfrak{p}/\mathfrak{q}$. Hvis der for enhver sådan uforfinelig kæde gælder at $h = \text{ht } \mathfrak{p}_h/\mathfrak{p}_0$, siges M at være *katernær*. Hvis der for alle maksimale kæder (*) i støtten for M , dvs kæder som er uforfinelige og således at \mathfrak{p}_0 er et minimalt primideal for M og \mathfrak{p}_h er et maksimalideal i R , gælder at $h = \dim M$, siges M at være *bi-equidimensional*. Det er klart, at en bi-equidimensional modul er equidimensional, co-equidimensional og katernær.

(1.11) Definition. En (endelig eller uendelig) følge (f_1, f_2, \dots) af elementer i ringen R kaldes en *M -højdefølge*, hvis følgende betingelse er opfyldt for alle i :

(*) For hvert primideal \mathfrak{p} , som tilhører støtten for M og omfatter (f_1, \dots, f_i) gælder, at $\dim M_{\mathfrak{p}} \geq i$.

Betingelsen kan også udtrykkes ved ulighederne $\text{ht}_M(f_1, \dots, f_i) \geq i$ for $i = 1, 2, \dots$. For $M = R$ er betingelsen, at der for alle primidealer \mathfrak{p} som omfatter (f_1, \dots, f_i) gælder, at $\text{ht } \mathfrak{p} \geq i$. Er dette opfyldt, kaldes følgen blot en *højdefølge*.

(1.12) Sætning. Antag, at R indeholder et legeme k og at R er af endelig transcendensgrad over k . Da gælder uligheden,

$$\dim R \leq \text{tdeg}_k R.$$

Bevis. Transcendensgraden er som bekendt det største antal algebraisk uafhængige (over k) elementer, der kan udtages fra R . Øjensynlig gælder for en kvotient $\overline{R} = R/\mathfrak{a}$, at $\text{tdeg}_k \overline{R} \leq \text{tdeg}_k R$. Yderligere er det velkendt, at hvis R er et integritetsområde og $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}$ er et primideal forskelligt fra (0) , så gælder endda $\text{tdeg}_k \overline{R} < \text{tdeg}_k R$. Af disse overvejelser følger let for enhver kæde (1.2.1), at $\text{tdeg}_k R/\mathfrak{p}_h + h \leq \text{tdeg}_k R/\mathfrak{p}_0 \leq \text{tdeg}_k R$, hvoraf påstanden. \square

2. Dimension af lokale ringe.

(2.1) Setup. I resten af dette kapitel betragtes en noethersk ring R , et ideal \mathfrak{a} i R , og en endeligt frembragt R -modul M . I visse af resultaterne forudsættes, at ringen R er lokal; i disse resultater betegner \mathfrak{m} maksimalidealet i R .

(2.2) Lemma. *Antag, at R er lokal. Da har M endelig længde, hvis og kun hvis der findes et naturligt tal n således, at $\mathfrak{m}^n M = (0)$.*

Bevis. Det er let at se, at påstanden er et korollar til Filtrationsætningen. Her er et mere direkte bevis: Antag først, at $\mathfrak{m}^n M = (0)$. Da defineres ved $F_i := \mathfrak{m}^i M$ en filtration i M ,

$$(0) = F_n \subseteq \cdots \subseteq F_1 \subseteq F_0 = M. \quad (2.2.1)$$

Øjensynlig er $F_{i+1} = \mathfrak{m}F_i$, så de successive kvotienter er $F_i/\mathfrak{m}F_i$ for $i = 0, \dots, n-1$. Undermodulen F_i i M er endeligt frembragt over R , og kvotienten $F_i/\mathfrak{m}F_i$ er derfor endeligt frembragt som modul over restklasselegemet R/\mathfrak{m} . De successive kvotienter er altså vektorrum af endelig dimension over R/\mathfrak{m} , og de har derfor endelig længde som R -moduler. Følgelig har også M endelig længde.

Antag omvendt, at M har endelig længde. Da har M en filtration (2.2.1), hvor de successive kvotienter F_i/F_{i+1} er isomorfe med R/\mathfrak{m} . Modulen R/\mathfrak{m} annulleres af \mathfrak{m} , og følgelig gælder for hvert i , at $\mathfrak{m}F_i \subseteq F_{i+1}$. Ved gentagen anvendelse heraf fås, at $\mathfrak{m}^n M = \mathfrak{m}^n F_0 \subseteq F_n = (0)$. \square

(2.3) Hovedsætning. *Antag, at R er lokal og $M \neq 0$. Betragt følgende tre tal:*

$\dim(M)$ er Krull-dimensionen,

$d_{\mathfrak{m}}(M)$ er graden af den polynomiale funktion $n \mapsto \text{long } M/\mathfrak{m}^n M$,

$s(M)$ er det mindste antal s af elementer f_1, \dots, f_s i maksimalidealet \mathfrak{m} således, at kvotientmodulen $M/(f_1, \dots, f_s)M$ har endelig længde.

Da gælder, at $\dim(M) = d_{\mathfrak{m}}(M) = s(M)$. Specielt er Krull-dimensionen $\dim(M)$ endelig.

Bevis. Det er antaget, at $M \neq 0$, så støtten for M er ikke tom; derfor er $\dim(M) \geq 0$. Af Nakayma's Lemma følger, at $\text{long } M/\mathfrak{m}^n M > 0$, når $n \geq 1$. Polynomiet svarende til $n \mapsto \text{long } M/\mathfrak{m}^n M$ er altså ikke nul-polynomiet, og derfor er $d_{\mathfrak{m}}(M) \geq 0$. Endelig skal det bemærkes, at tallet $s(M)$ er veldefineret, idet der findes endelig mange elementer f_1, \dots, f_s i \mathfrak{m} således, at $M/(f_1, \dots, f_s)M$ har endelig længde. Fx er dette opfyldt, hvis (f_1, \dots, f_s) er et frembringersystem for maksimalidealet \mathfrak{m} , idet $M/(f_1, \dots, f_s)M$ så er en endelig frembragt modul over restklasselegemet R/\mathfrak{m} , og dermed af endelig længde. For $s = 0$ består undermodulen $(f_1, \dots, f_s)M$ blot af nul-elementet i M og kvotienten $M/(f_1, \dots, f_s)M$ er altså M . Betingelsen $s(M) = 0$ udtrykker altså, at M har endelig længde.

Vi viser først, at hver af betingelserne, $\dim(M) = 0$, $d_{\mathfrak{m}}(M) = 0$, og $s(M) = 0$, er ækvivalente med, at M har endelig længde. Som nævnt ovenfor følger denne påstand for $s(M)$ af definitionen. Tallet $\dim(M)$ er dimensionen af M . Betingelsen $\dim(M) = 0$ betyder således, at alle primidealer i støtten for M er maksimalidealer, og dette gælder som

30. marts 2007

bekendt netop, hvis M har endelig længde. For $d_m(M)$ indsættes påstanden således: betingelsen $d_m(M) = 0$ betyder, at funktionen $\text{long } M/\mathfrak{m}^n M$ er konstant når $n \gg 0$. Da denne funktion er voksende, er dette opfyldt hvis og kun hvis der findes et naturligt tal n således, at $\mathfrak{m}^n M = \mathfrak{m}^{n+1} M$. Ifølge Nakayama's Lemma er $\mathfrak{m}^n M = \mathfrak{m}^{n+1} M$, hvis og kun hvis $\mathfrak{m}^n M = (0)$. Lemma (2.2) viser, at dette indtræffer netop, når M har endelig længde.

Af det viste følger, at ligningerne $\dim(M) = d_m(M) = s(M)$ gælder, hvis et af de tre tal er 0. Vi efterviser ligningerne i almindelighed ved at bevise hver af ulighederne $\dim(M) \leq d_m(M)$, $d_m(M) \leq s(M)$, og $s(M) \leq \dim(M)$.

Uligheden $\dim(M) \leq d_m(M)$: Krull-dimensionen $\dim(M)$ er et supremum, så uligheden er ækvivalent med følgende påstand: For enhver endeligt frembragt R -modul M og enhver kæde af primidealer,

$$\text{Ann } M \subseteq \mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_h,$$

er $h \leq d_m(M)$. Denne påstand vises ved fuldstændig induktion efter $d := d_m(M)$. Hvis $d = 0$ gælder endda $\dim(M) = d_m(M)$ ifølge det allerede viste. Vi kan derfor antage, at $d \geq 1$. I kæden kan vi øjensynlig antage, at \mathfrak{p}_0 er et minimalt primideal for M . Heraf følger, at \mathfrak{p}_0 er et associeret primideal for M , og M indeholder derfor en undermodul N , der er isomorf med R/\mathfrak{p}_0 . Det er nok at vise, at $h \leq d_m(N)$, thi da N er en undermodul i M følger det af et velkendt resultat om Samuel-polynomier, at $d_m(N) \leq d_m(M)$. Vi kan derfor erstatte M med N , dvs vi kan antage, at M er isomorf med R/\mathfrak{p}_0 . Uligheden $h \leq d_m(M)$ er opfyldt, hvis $h = 0$, så vi kan antage, at $h \geq 1$. Vælg nu et element f i overskudsmængden $\mathfrak{p}_1 \setminus \mathfrak{p}_0$, og betragt kvotientmodulen M/fM . Da $M = R/\mathfrak{p}_0$ og f ikke tilhører \mathfrak{p}_0 , er multiplikation med f injektiv på M . Af et velkendt resultat om Samuel-polynomier følger derfor, at $d_m(M/fM) < d_m(M)$. Den anførte påstand gælder derfor for modulen M/fM .

Nu var $M = R/\mathfrak{p}_0$, så $M/fM = R/(\mathfrak{p}_0 + (f))$. Specielt er $\text{Ann } M/fM = \mathfrak{p}_0 + (f)$. Da f var valgt i \mathfrak{p}_1 , udgør \mathfrak{p}_i 'erne for $i > 0$ en kæde af primidealer, som omfatter $\text{Ann } M/fM$. Der er $h - 1$ skarpe inklusioner i denne kæde, så da påstanden gælder for M/fM sluttes, at $h - 1 \leq d_m(M/fM)$. Da $d_m(M/fM) < d_m(M)$ følger det, at $h \leq d_m(M)$, hvilket var påstanden for M .

Uligheden $d_m(M) \leq s(M)$: Tallet $s(M)$ er et infimum, så uligheden udsiger, at der for vilkårlige s elementer f_1, \dots, f_s i \mathfrak{m} således at $M/(f_1, \dots, f_s)M$ har endelig længde gælder, at $d_m(M) \leq s$. Lad $\mathfrak{a} = (f_1, \dots, f_s)$ være idealet frembragt af f_1, \dots, f_s . Da er $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{m}$. Følgelig er $\text{long } M/\mathfrak{a}^n M \geq \text{long } M/\mathfrak{m}^n$ for alle n . Funktionen $\text{long } M/\mathfrak{a}^n M$ er ifølge et resultat om Samuel-polynomier polynomial af grad $\leq s$. Graden $d_m(M)$ af den mindre funktion $\text{long } M/\mathfrak{m}^n M$ er derfor højst lig med s , som påstået.

Uligheden $s(M) \leq \dim(M)$: Denne ulighed vises ved fuldstændig induktion efter $h := \dim(M)$ (som er endelig ifølge det allerede viste). Betragt kæder af primidealer med h inklusioner,

$$\text{Ann } M \subseteq \mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_h.$$

Disse kæder er maksimale i den forstand, at $h = \dim M$. Vi kan antage, at $h \geq 1$, idet den påståede ulighed er vist at være en lighed, hvis $h = 0$. I sådanne maksimale kæder

30. marts 2007

må \mathfrak{p}_0 nødvendigvis være et minimalt primideal for M . Specielt er der kun endelig mange primidealer, der kan forekomme som \mathfrak{p}_0 i en sådan kæde. Da $h \geq 1$ kan intet af disse mulige \mathfrak{p}_0 være lig med \mathfrak{m} . Det er et velkendt resultat om primidealer, at foreningsmængden af de mulige \mathfrak{p}_0 så heller ikke kan være lig med \mathfrak{m} . Altså findes et element f i \mathfrak{m} således, at f ikke tilhører de mulige \mathfrak{p}_0 'er. Betragt nu kvotienten M/fM . Dimensionen af kvotienten er mindre end eller lig med dimensionen af modulen, fordi støtten for kvotienten er en delmængde af støtten for modulen. Valget af f sikrer ydermere, at intet af de mulige \mathfrak{p}_0 'er kan tilhøre støtten for M/fM . Altså er $\dim(M/fM) < \dim(M)$. Induktionsforudsætningen medfører derfor, at $s(M/fM) \leq \dim(M/fM)$. På den anden side følger det klart af definitionen på s , at der for hvert element f i \mathfrak{m} gælder, at $s(M) \leq s(M/fM) + 1$. Vi har således vist ulighederne $s(M) \leq s(M/fM) + 1 \leq \dim(M/fM) + 1 \leq \dim(M)$, og dermed uligheden $s(M) \leq \dim(M)$.

Hermed er de tre uligheder eftervist og beviset for hovedsætningen afsluttet. \square

(2.4) Tilføjelse. Under forudsætningerne i Hovedsætningen gælder for ethvert ideal $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{m}$ således at $M/\mathfrak{a}M$ har endelig længde, at

$$d_{\mathfrak{a}}(M) = \dim M.$$

Bevis. Af Lemma (2.2), anvendt på modulen $M/\mathfrak{a}M$, følger, at der findes et naturligt tal k således, at $\mathfrak{m}^k M \subseteq \mathfrak{a}M$. Ifølge antagelsen er $\mathfrak{a}M \subseteq \mathfrak{m}M$. Ved gentagen anvendelse af disse inklusioner ses, at $\mathfrak{m}^{kn} M \subseteq \mathfrak{a}^n M \subseteq \mathfrak{m}^n M$. Vi får derfor følgende uligheder mellem længder:

$$\text{long } M/\mathfrak{m}^{kn} M \geq \text{long } M/\mathfrak{a}^n M \geq \text{long } M/\mathfrak{m}^n M.$$

Heraf ses, at når $n \gg 0$, er polynomiet $\chi_{\mathfrak{a}, M}(n)$ klemt mellem polynomierne $\chi_{\mathfrak{m}, M}(kn)$ og $\chi_{\mathfrak{m}, M}(n)$. De to sidste polynomier har øjensynlig samme grad, nemlig graden $d_{\mathfrak{m}}(M) = \dim M$. Altså har også det første polynomium denne grad, dvs $d_{\mathfrak{a}}(M) = \dim M$, som påstået. \square

(2.5) Korollar. Antag, at R er lokal, og lad $k := R/\mathfrak{m}$ være restklasselegemet. Krulldimensionen $\dim R$ er da lig med det mindste antal s af elementer i \mathfrak{m} , som frembringer et \mathfrak{m} -primært ideal. Specielt gælder uligheden,

$$\dim R \leq \text{rk}_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2,$$

hvor rangen på højresiden er dimensionen af $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ som vektorrum over k .

Bevis. Et ideal $\mathfrak{q} = (f_1, \dots, f_s)$ er som bekendt \mathfrak{m} -primært, hvis og kun hvis \mathfrak{q} indeholder en potens af \mathfrak{m} , eller ækvivalent, hvis og kun hvis kvotienten R/\mathfrak{q} har endelig længde. Af den sidste karakterisering og ligningen $s(R) = \dim R$ fra hovedsætningen følger den første påstand. Ifølge Nakayama's lemma er dimensionen på ulighedens højreside lig med det minimale antal elementer, der frembringer \mathfrak{m} . Uligheden er derfor et specialtilfælde af den første påstand. \square

30. marts 2007

(2.6) Parametersystem. Når R er lokal og $M \neq 0$ siges et system af elementer f_1, \dots, f_s af elementer i \mathfrak{m} at være et *parametersystem* for M , hvis $s = \dim M$ og $M/(f_1, \dots, f_s)M$ har endelig længde. Eksistensen af parametersystemer følger af ligningen $s(M) = \dim M$ fra Hovedsætning (2.3).

Specielt er et parametersystem for R et system af $s = \dim R$ elementer f_1, \dots, f_s som frembringer et \mathfrak{m} -primært ideal.

(2.7) Korollar. Antag, at R er lokal og at $M \neq 0$. Der findes da primidealer \mathfrak{q} , som tilhører støtten for M og opfylder, at $\dim M = \dim R/\mathfrak{q}$. Ethvert sådant primideal er et minimalt primideal for M . Specielt er der kun endelig mange sådanne primidealer. Lad f være et element i maksimalidealet \mathfrak{m} . Hvis f tilhører et af disse primidealer, så er $\dim M/fM = \dim M$. I modsat fald er

$$\dim M/fM = \dim M - 1.$$

Bevis. Den første påstand følger af Observation (1.5): Dimensionen $\dim M$ er supremum over \mathfrak{p} i støtten for M af $\dim R/\mathfrak{p}$, og da dimensionerne er endelige, er supremum et maximum. Mere præcist findes der kæder,

$$\text{Ann } M \subseteq \mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \dots \subset \mathfrak{p}_h,$$

hvor $h = \dim M$, og kravet til \mathfrak{q} er netop, at \mathfrak{q} indgår som \mathfrak{p}_0 i en sådan kæde. I en sådan kæde er \mathfrak{p}_0 et minimalt primideal for M , thi ellers ville der findes et primideal \mathfrak{p} med $\text{Ann } M \subseteq \mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}_0$, og dermed en kæde med $h + 1$ skarpe inklusioner, i modstrid med at $h = \dim M$ var det maksimale antal skarpe inklusioner. Som bekendt findes der kun endelig mange minimale primidealer for M . Heraf følger den tredje påstand.

Lad nu f være element i \mathfrak{m} . Støtten for M/fM består af de primidealer \mathfrak{p} i støtten for M , for hvilke $f \in \mathfrak{p}$. Det er altså klart, at $\dim M/fM \leq \dim M$, og at lighedstegnet gælder, hvis og kun hvis f tilhører et af de primidealer \mathfrak{q} i støtten for M , for hvilke $\dim R/\mathfrak{q} = \dim M$. Det er således korollarets essentielle påstand, at hvis $\dim M/fM < \dim M$, så gælder $\dim M/fM = \dim M - 1$. Denne påstand følger af ligningen $\dim M = s(M)$ fra Hovedsætningen, idet der øjensynlig altid gælder $s(M) - 1 \leq s(M/fM) \leq s(M)$. \square

(2.8) Bemærkning. Antag, at R er lokal og at $M \neq 0$. Det følger at Korollar (2.7), at når $f \in \mathfrak{m}$, så gælder ulighederne $\dim M - 1 \leq \dim M/fM \leq \dim M$. Ved gentagen anvendelse af disse uligheder sluttes, at for en vilkårlig følge (f_1, \dots, f_s) af elementer i \mathfrak{m} gælder ulighederne,

$$\dim M - s \leq \dim M/(f_1, \dots, f_s)M \leq \dim M,$$

og yderligere, at hvis uligheden til venstre er en lighed, altså hvis

$$\dim M/(f_1, \dots, f_s)M = \dim M - s, \tag{2.8.1}$$

så er $\dim M/(f_1, \dots, f_i)M = \dim M - i$ for $i = 1, \dots, s$.

Hvis den givne følge er et parametersystem for M , dvs hvis $s = \dim M$ og kvotienten $M/(f_1, \dots, f_s)M$ har endelig længde, så har kvotienten dimension 0, og lighed gælder i (2.8.1). Heraf aflæses, at lighed gælder i (2.8.1) hvis den givne følge er delfølge af et parametersystem.

Antag omvendt, at lighed i (2.8.1) er opfyldt for den givne følge. Da er $s \leq \dim M$ og kvotienten $\overline{M} = M/(f_1, \dots, f_s)M$ dimensionen $t := \dim M - s$. Lad (g_1, \dots, g_t) være et parametersystem for \overline{M} . Da har

$$M/(f_1, \dots, f_s, g_1, \dots, g_t)M = \overline{M}/(g_1, \dots, g_t)\overline{M}$$

endelig længde og $s + t = \dim M$. Følgen $(f_1, \dots, f_s, g_1, \dots, g_t)$ er derfor et parametersystem for M .

Heraf aflæses, at lighed gælder i (2.8.1), hvis og kun hvis følgen (f_1, \dots, f_s) er delfølge af et parametersystem.

(2.9) Opgaver.

- H4 1. I $R := k[X, Y]$ (k er et legeme) betragtes primidealene $\mathfrak{q} = (0)$, $\mathfrak{p} := (Y)$ og $\mathfrak{m} := (X, Y)$, og kvotienten $M := R/\mathfrak{p}$ som R -modul. Bestem brøkmodulerne $M_{\mathfrak{q}}$, $M_{\mathfrak{p}}$, og $M_{\mathfrak{m}}$, og deres Krull-dimensioner.