December 2004/CB

Test din viden i 2KF

1: Definer begrebet holomorf funktion.

2: Angiv potensrækkerne omkring 0 for $\sin(z)$ og for $\mathrm{Log}(1+z)$ og for hvilke z de gælder.

3. Angiv mængderne

$\{z \in \mathbb{C} \mid \exp(z) = -1\} =$

$\{z \in \mathbb{C} \mid \cos(z) = 0\} =$

4: Givet: G åben mængde, γ lukket vej i G, $f \in \mathcal{H}(G)$
Gælder $\int_\gamma f(z)dz = 0$
Sæt kryds: Ja altid $\square$; Ja, hvis f har en stamfunktion $\square$; Ja, hvis G er konveks $\square$

5: Lad $f : G \to \mathbb{C}$ hvor G er åben i $\mathbb{C}$. Betragt udsagnene:
(a) f har en stamfunktion (b) f er holomorf
Gælder $(a) \Leftarrow (b)$ $\square$ $(a) \Rightarrow (b)$ $\square$ $(a) \Leftrightarrow (b)$ $\square$
Sæt kryds i de(n) relevante boks(e). Hvor mange krydser får du hvis G er enkeltsammenhængende:

6: Lad G være åben og lad $f_n \in \mathcal{H}(G), n = 1, 2, \ldots$.
Antag at f_n konvergerer mod funktionen $f : G \to \mathbb{C}$ på følgende måde:
(a): punktvis , (b): lokalt uniformt, (c): kompakt uniformt, (d): uniformt
Anfør hvilke af de 4 egenskaber der sikrer, at f bliver holomorf i G.

7: Lad f være en hel funktion og antag at

$$|f(z)| \le \frac{1}{1+|z|^2} \text{ for } z \in \mathbb{C}$$

For hvilke z er $f(z) = 0$?

8: Lad f være en hel funktion. Kan nulpunktsmængden være

- (a) tom
- (b) bestå af 3 punkter
- (c) være $=[0, 1]$
- (d) være $=\mathbb{Z}$

Svar ja eller nej til hvert spørgsmål. Hvis du svarer ja så giv et eksempel.

9: Udregn $\log i =$ og $\operatorname{Log} i =$

10: I hvilken mængde er Log holomorf ?

11: Har $\tan(z)$ nogen
poler:
væsentlige singulariteter:
(Svar ja eller nej). Hvis ja, angiv dem.

12: Lad $f(z) = z/(z^2 - 5z + 6)$. Udregn $\operatorname{Res}(f, 2) =$ Udregn $\operatorname{Res}(f, 3) =$

13: Lad $f : K(0, 1) \to \mathbb{C}$ være en ikke konstant holomorf funktion på enhedscirkelskiven. Kan billedmængden $f(K(0, 1))$ være (svar ja eller nej; hvis ja angiv en f, hvis nej giv kort begrundelse)
(a) $\mathbb{R}$
(b) $K(0, 5)$
(c) $K(0, 1) \cup K(5, 1)$

14: Lad f være en hel funktion så $f(z) \neq 0$ for $|z| = 1$. Er det muligt at

$$\int_{\partial K(0,1)} \frac{f'(z)}{f(z)} \, dz = 5i\pi$$

Begrund dit ja eller nej.