

# Mat 2KF – Minilex

Henrik Dahl

1. januar 2004

## Resumé

**ADVARSEL** - dette er et total underground-dokument!. Det er livsfarligt at bruge ukritisk. Der er næsten sikkert graverende fejl. Jeg påtager mig intet ansvar overhovedet for noget som helst. Faktisk vil jeg for en sikkerheds skyld fraråde brug af det følgende...

Ved referencer til lærebøgerne bruges (B) for Berg (Kompleks funktionsteori), og (S) for Solovej (Supplement). Check altid referencen for at være sikker, og lav kun henvisninger til de officielle lærebøger - absolut ikke til dette dokument.

## Indhold

1 Definitioner	2
2 Sætninger	6
3 Symboler	15
4 Opskrifter og trix	15
5 Gennemregnede eksempler	16

### Nogle nyttige formler med $i$

$i^2 = -1$	$i^3 = -i$	$i^4 = 1$
$1/i = -i$	$\sqrt{i} = (-1)^{-4}$	$1/\sqrt{i} = -(-1)^{3/4}$
$e^{i\pi} = -1$	$e^{i\pi/2} = i$	$e^{-i\pi/2} = -i$
$\text{Log}(i) = i\pi/2$	$\text{Log}(-i) = -i\pi/2$	$\text{Log}(-1) = i\pi$
$\sinh(iz) = i \sin z$	$\sin(iz) = i \sinh(z)$	
$\cosh(iz) = \cos(z)$	$\cos(iz) = \cosh(z)$	

## 1 Definitioner

Afstand	Afstand mellem to komplekse tal $z, w$ er $ z - w $ . (B.p.5)
arg	For $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ betegner $\arg z$ mængden af argumenter for $z$ , dvs. $\{\theta \in \mathbb{R} \mid z =  z e^{i\theta}\}$ (B.p.79)
Arg	For $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ betegner $\text{Arg } z$ det entydigt bestemte argument, der tilhører $]-\pi, \pi]$ , dvs. $\text{Arg } z \in \arg z \cap ]-\pi, \pi]$ , $\arg z = \text{Arg } z + 2\pi\mathbb{Z}$ .  Hovedargumentet er en kontinuert argumentfunktion for den opskårne plan $\mathbb{C}_\pi = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{R} \mid z \leq 0\}$ .  Vi har idet $z = x + iy$ $\text{Arg } z = \text{Arccos } \frac{x}{ z } (y > 0) = \text{Arctan } \frac{y}{x} (x > 0) = -\text{Arccos } \frac{x}{ z } (y < 0)$ , så $\text{Arg} \in C^\infty$ på den opskårne plan. (B.p.79)  Kan for hvert $\alpha \in \mathbb{R}$ bestemme $\text{Arg}_\alpha$ for den opskårne plan $\mathbb{C}_\alpha = \mathbb{C} \setminus \{re^{i\alpha} \mid r \geq 0\}$ ved $\text{Arg}_\alpha(z) \in \arg z \cap ]\alpha - 2\pi, \alpha]$ . Da $\text{Arg}_\alpha z = \text{Arg}(e^{i(\pi-\alpha)}z) + \alpha - \pi$ for $z \in \mathbb{C}_\alpha$ er $\text{Arg}_\alpha \in C^\infty$ på den opskårne plan. (B.p.79)
Argumentfunktion	Ved en argumentfunktion for $A \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$ forstås en funktion $\theta : A \rightarrow \mathbb{R}$ så $\theta(z) \in \arg z$ for $z \in A$ , dvs. $z =  z e^{i\theta(z)}$ (B.p.79)
Argumentvariation	Lad $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ være kontinuert kurve, der ikke passerer 0. Ved argumentvariationen langs $\gamma$ forstås tallet $\arg\text{var}(\gamma) = \theta(b) - \theta(a)$ hvor $\theta$ er en vilkårlig kontinuert argumentfunktion langs $\gamma$ (B.D.5.12 (p.82))
Begrænset mængde	$M$ er begrænset hvis der findes $K$ så $ z  \leq K$ for $z \in M$ (B.p.57)
Cirkelskive	Cirkelskive : $K(a, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid  a - z  < r\}$ er den åbne cirkelskive med centrum $a$ og radius $r$ . Den udprikkede cirkelskive er $K'(a, r) = K(a, r) \setminus \{a\} = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 <  a - z  < r\}$ (B.p.5)
Differentiabel funktion	$G \subseteq \mathbb{C}$ åben, $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ . $f$ er differentiablel i $z_0 \in G$ hvis $\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$ , $h \in K'(0, r)$ har grænseværdi for $h \rightarrow 0$ . Grænseværdien kaldes differentialkvotienten og betegnes $f'(z_0)$ (B.D.1.1 (p.5))
Diskret mængde	Lad $G \subseteq \mathbb{C}$ åben. $A \subseteq G$ kaldes diskret i $G$ , hvis $A$ ikke har nogen fortætningspunkter i $G$ (B.D.5.5 (p.77))
Fortætnings-punkt	Lad $A \subseteq \mathbb{C}$ være givet. Et punkt $a \in \mathbb{C}$ kaldes et fortætningspunkt for $A$ hvis $\forall r > 0 : K'(a, r) \cap A \neq \emptyset$ . Ækvivalent hermed: der findes en følge $x_n \in A \setminus \{a\}$ så $x_n \rightarrow a$ for $n \rightarrow \infty$ . (B.D.5.4 (p.77))
Gren	Se f.eks. på $z^{1/n}$ . En gren heraf er en funktion $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ defineret på delmængde $A \subseteq \mathbb{C}$ så $f(z) = z^{1/n}$ for alle $z \in A$ . Hvis $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ er en gren, så er $z \rightarrow f(z)e^{2\pi ik/n}$ også en gren for $k \in \mathbb{N}_0$ . 0 er et forgreningspunkt for $z^{1/n}$ (B.p.83))
Harmonisk funktion	$\phi : G \rightarrow \mathbb{R}, G \subseteq \mathbb{R}^2$ , $G$ åben, $\phi \in C^2$ kaldes harmonisk hvis $\nabla^2 \phi = 0$ i $G$ . Så $\text{Re } f$ og $\text{Im } f$ , $f \in \mathcal{H}(G)$ er harmoniske (B.p.63)
Hel funktion	En holomorf funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ kaldes hel. (ex. polynomier, exp, sin, cos, sinh,

cosh, modex.  $1/z$ ) (B.p.66)

Holomorfe funktion	$G \subseteq \mathbb{C}$ åben, $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ . $f$ er holomorfe i $G$ hvis $f$ er differentiable i alle punkter i $G$ . Mængden af holomorfe funktioner på $G$ kaldes $\mathcal{H}(G)$ (B.D.1.1 (p.5))
Hovedlogaritme	Den værdi af $\log$ , der svarer til hovedargumentet af $z$ kaldes hovedlogaritmen og betegnes $\text{Log } z$ , dvs. $\text{Log } z = \log  z  + i \text{Arg } z$ , og er den omvendte funktion til restriktionen af $\exp$ til strimlen $\{z \in \mathbb{C} \mid -\pi < \text{Im} z \leq \pi\}$ (B.p.84)
Integrale	$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ kontinuert. $\int_a^b f(t) dt = \int_a^b \text{Re} f(t) dt + i \int_a^b \text{Im} f(t) dt$ . Sædvanlige regler gælder. (B.p.29)
Isoleret punkt	Et punkt $a \in A$ der ikke er fortætningspunkt for $A$ kaldes et isoleret punkt i $A$ . Der gælder $\exists r > 0 : K(a, r) \cap A = \{a\}$ . (B.D.5.4 (p.77))
Kompleks funktion	$f : A \rightarrow \mathbb{C}, A \subseteq \mathbb{C}$ (B.p.5). $f(z) = \text{Re} f(z) + i \text{Im} f(z)$ (B.p.6) $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ (B.p.14)
Komplekst tal	Komplekst tal $z = x + iy = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ . $x = \text{Re}(z)$ kaldes realdel, $y = \text{Im}(z)$ imaginærdel, $r =  z  = \sqrt{x^2 + y^2}$ modulus, og $\arg(z)$ er mængden af $\theta \in \mathbb{R}$ hvor $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ for $z \neq 0$ (B.p.5)
	$\text{Re} z$ og $\bar{z}$ er ikke differentiable nogetsteds i $\mathbb{C}$ (B.O. 1.5 (p.25))
Kontinuert funktion	$f : A \rightarrow \mathbb{C}, A \subseteq \mathbb{C}$ hvor der gælder (B.p.5)
	$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall z \in A :  z - z_0  < \delta \Rightarrow  f(z) - f(z_0)  < \varepsilon$
Konveks mængde	$G \subseteq \mathbb{C}$ er konveks hvis for alle $a, b \in G : (1-t)a + tb \in G$ for $t \in [0, 1]$ (B.p.41)
Konvergens, punktvis	En følge af funktioner $f_n : M \rightarrow \mathbb{C}$ konvergerer punktvis mod $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ hvis (B.p.55)
	$\forall x \in M \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N :  f(x) - f_n(x)  < \varepsilon$
Konvergens, uniform	En følge af funktioner $f_n : M \rightarrow \mathbb{C}$ konvergerer uniformt mod $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ hvis (B.D.4.1 (p.56))
	$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall x \in M \forall n \geq N :  f(x) - f_n(x)  < \varepsilon$
	(Alternativt $\sup\{ f(x) - f_n(x)  \mid x \in M\} \rightarrow 0$ ).
Konvergens, lokalt uniform	Lad $G \subseteq \mathbb{C}$ være åben. En følge af funktioner $f_n : G \rightarrow \mathbb{C}$ siges at konvergere lokalt uniformt mod $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ hvis $\forall a \in G \exists r > 0 : \overline{K(a, r)} \subseteq G \wedge f_n \rightarrow f$ uniformt for $z \in \overline{K(a, r)}$ (B.D.4.14 (p.65))
Konvergens, af række	En uendelig række $\sum_0^\infty f_n(x)$ af funktioner $f_n : M \rightarrow \mathbb{C}$ er uniformt konvergent med sumfunktion $s : M \rightarrow \mathbb{C}$ hvis $s_n(x) = \sum_0^n f_k(x), x \in M$ konvergerer uniformt mod $s$ (B.D.4.3 (p.58))
Kurveintegraller	$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ orienteret og $C^1$ -kurve. Lad $\gamma^* = \gamma([a, b])$ , og lad $f : \gamma^* \rightarrow \mathbb{C}$ være kontinuert. Ved kurveintegralet af $f$ langs $\gamma$ forstås det komplekse tal $\int_\gamma f = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$ (B.D.2.2 (p.31)).

Bemærk:  $\int_{-\gamma} f = - \int_\gamma f$

- Kurveintegrals langs vej  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  orienteret og stykkevist  $C^1$  (vej). Ved kurveintegralet af  $f$  langs vejen  $\gamma$  forstås det komplekse tal  $\int_{\gamma} f = \int_{\gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_n} f = \sum_1^n \int_{\gamma_j} f = \sum_1^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$  (B.D.2.5 (p.33)).
- Kurve-sammenhæng  $A \subseteq \mathbb{C}$  er kurvesammenhængende, hvis to vilkårlige punkter fra  $A$  kan forbindes med en kontinuert kurve, der forløber helt i  $A$ .  $\forall P, Q \in A \exists$  kontinuert  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \forall t \in [0, 1] : \gamma(0) = P, \gamma(1) = Q, \gamma(t) \in A$ . Område er kurvesammenhængende (B.D.5.1 (p.75))
- Laplace-operator  $\nabla^2 = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  (B.p.63)
- Laurent-række Ved en Laurent-række forstås en dobbelt uendelig række af formen  $\sum_{-\infty}^{\infty} c_n z^n$  hvor  $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  er givne komplekse tal og  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  (B.D.6.16 (p.110))
- Den skal forstås som summen af to uendelige rækker:  $\sum_1^{\infty} c_{-n} z^{-n} + \sum_0^{\infty} c_n z^n$  hvor de forlanges, at begge rækker er konvergente. Hvis konvergensradier er hhv.  $\rho_1, \rho_2$  er rækken absolut konvergent i ringområdet  $G = \{z \in \mathbb{C} | 1/\rho_1 < |z| < \rho_2\}$  mellem de to koncentriske cirkler med centrum i 0 og radier  $1/\rho_1, \rho_2$ . Den ved Laurent-rækken definerede funktion er holomorf i  $G$  (B.p.110-111)
- Kan også tages i centrum  $a$ :  $\sum_{-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$  på ringområdet  $\{z \in \mathbb{C} | R_1 < |z-a| < R_2\}$  (B.p.111)
- Logaritme-funktion Ved en logaritmfunktion for  $A \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$  forstås en funktion  $l : A \rightarrow \mathbb{C}$ , så  $l(z) \in \log z$  for  $z \in A$ , altså så  $\exp(l(z)) = z$ . Hvis  $\alpha$  er en argumentfunktion for  $A$  så er  $l(z) = \log |z| + i\alpha(z)$  en logaritmfunktion for  $A$  og hvis  $l$  er en logaritmfunktion for  $A$ , så er  $\alpha = \text{Im} l$  en argumentfunktion for  $A$ . Dermed ses, at  $A \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$  har en kontinuert argumentfunktion netop hvis den har en kontinuert logaritmfunktion.  $\text{Log}_{\alpha}$  er en holomorf gren af logaritmen i den opskårne plan  $\mathbb{C}_{\alpha}$  og er der en stamfunktion til  $1/z$ .  $\text{Log}_{\pi} = \text{Log}$  på  $\mathbb{C}_{\pi}$  (B.p.84-85)
- Længde af vej  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  en vej,  $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ . Længden er  $L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$  (idet  $|\gamma'(t)|$  stykvist kontinuert så integrabel). (B.D.2.7 (p.34))
- Meromorf funktion Funktion, der ikke har væsentlige singulariteter. Mængden heraf betegnes  $\mathcal{M}(G)$  (B.p.99)
- Ved en meromorf funktion i et område  $G \subseteq \mathbb{C}$  forstås en afbildning  $h : G \rightarrow \mathbb{C} \cup \infty$  med egenskaberne (B.D.6.15 (p.108))
- $P = \{z \in G | h(z) = \infty\}$  er diskret i  $G$
  - Restriktionen  $f = h|_{G \setminus P}$  er holomorf i den åbne mængde  $G \setminus P$
  - Ethvert punkt  $a \in P$  er en pol for  $f$ .

En holomorf funktion i  $G$  er meromorf med  $P = \emptyset$ . (B.p.109)

Funktionen  $h(z) = f(z)/g(z)$  er meromorf med polmængde består af de  $a \in Z(g)$  hvor ordenen som nævner-nulpunkt er større end ordenen som tællernulpunkt. Man kan på naturlig måde addere og multiplicere to meromorfe funktioner idet sum og produkt er holomorfe uden for den samlede polmængde, men visse af polerne kan være hævelige singulariteter for resultatet. Hvis  $h$  er meromorf og  $\neq 0$  er også  $1/h$  meromorf. Nulpunkter for  $h$  af orden  $n$  er også nulpunkter af orden  $n$  for  $1/h$ , og

det samme gælder for polerne. (B.p.109)

En rational funktion er meromorf i  $\mathbb{C}$  med kun endeligt mange poler (B.p.109)

Omløbstal	For en lukket kontinuert kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ kaldes $\omega(\gamma, 0) = \frac{1}{2\pi} \text{argvar}(\gamma) \in \mathbb{Z}$ kurvens omløbstal om 0 (B.D.5.12 (p.82)). Bem. omløbstalet skifter fortegn hvis gennemløbsretningen ændres.
Område	$G \subseteq \mathbb{C}$ åben kaldes et område hvis alle $P, Q \in G$ kan forbindes med trappelinje i $G$ (B.D.1.8 p.16)
Område, enkeltsammenhængende	$G \subseteq \mathbb{C}$ område. For to vilkårlige kurver med samme start- og slutpunkt gælder, at den ene kan deformeres kontinuert over i den anden (område 'uden huller'). Formelt: Der findes kontinuert homotopi $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow G$ med $H(t, 0) = \gamma_0(t), H(t, 1) = \gamma_1(t), H(t, s) = \gamma_s(t)$ hvor $t \in [0, 1]$ og $\gamma_s(0) = H(0, s) = a, \gamma_s(1) = H(1, s) = b$ . (B.p. 41) Bem: enkeltsammenhængende $\subseteq$ konveks $\subseteq$ stjerneformet.
Område, stjerneformet	$G \subseteq \mathbb{C}$ område. $G$ er stjerneformet om $a \in G$ hvis der for alle $z \in G$ gælder, at linjestykket $[a, z] \subseteq G$ (B.p.41)
Pol	En isoleret singularitet $a$ kaldes en pol af orden $m \in \mathbb{N}$ for $f$ hvis $(z - a)^m f(z)$ har en grænseværdi for $z \rightarrow a$ og $\lim_{z \rightarrow a} (z - a)^m f(z) \neq 0$ . En pol af orden 1 kaldes en simpel pol (B.D.6.10 (p.104))
Potensfunktion	Potenser $z^\alpha, (z, \alpha \in \mathbb{C})$ defineres for $z \neq 0$ ved $z^\alpha = \exp(\alpha \log z)$ og er dermed en uendelig mængde. (B.p.86)  Hvis $l$ er en holomorf gren af logaritmen for et område $G \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , så er $\exp(\alpha l(z))$ en holomorf gren af $z^\alpha$ med afledet $\alpha \exp((\alpha - 1)l(z))$ (B.p.87)
Principal del	Den til $f \in \mathcal{H}(G \setminus \{a\})$ hørende funktion $f_e(z) = \sum_1^\infty c_{-n}(z - a)^{-n}$ - altså summen af leddene hørende til negative potenser i Laurent-rækken kaldes den principale del af $f$ . $f(z) - f_e(z)$ er holomorf i $G \setminus \{a\}$ , og har en hævelig singularitet for $z = a$ . $f_i = f - f_e$ fastlægger den holomorfe udvidelse til $a$ (B.D.6.20, p.115))
Rational funktion	Ved en rational funktion forstås et udtryk af formen $p(z)/q(z)$ hvor $p, q \in \mathbb{C}(z), q \neq 0$ . Funktionen $f(z) = p(z)/q(z)$ er dermed holomorf i $\mathbb{C} \setminus Z(q)$ og $Z(f) = Z(p)$ (B.p.105)
Residuum	Lad $f \in \mathcal{H}(G \setminus \{a\})$ have en isoleret singularitet for $z = a \in G$ med Laurent-rækken $f(z) = \sum_{-\infty}^\infty c_n(z - a)^n$ . Koefficienten $c_{-1}$ kaldes residuet af $f$ i $a$ og betegnes $\text{Res}(f, a)$ , så $\text{Res}(f, a) = c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K(a, r)} f(z) dz, 0 < r < \rho$ , hvor $K(a, \rho)$ er den største cirkelskive i $G$ med centrum i $a$ (B.p.125)
Singularitet	Lad $G \subseteq \mathbb{C}$ område og $a \in G$ . Hvis $f \in \mathcal{H}(G \setminus \{a\})$ kaldes $a$ en isoleret singularitet for $f$ . Hvis $f$ kan tillægges en kompleks værdi i $a$ så $f$ bliver holomorf i $G$ siges singulariteten at være hævelig. Den værdi $f$ skal tillægges i $a$ er $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$ . Ellers kaldes singulariteten essentiel (B.D.6.8 (p.103))
Stamfunktion	$f : G \rightarrow \mathbb{C}, G \subseteq \mathbb{C}$ område. En funktion $F : G \rightarrow \mathbb{C}$ kaldes en stamfunktion til $f$ , hvis $F$ er holomorf i $G$ og $F' = f$ (B.D.2.10 (p.35))
Trappelinje	Kurve bestående af vandrette og lodrette linjestykker (B.D.1.8 (p. 16))

Vej En vej (contour) er en parameterfremstilling  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ , som er stykkevist  $C^1$ . (B.D.2.5 (p.33))

## 2 Sætninger

Arcsin Funktionen  $\text{Arcsin } z = \int_{[0,z]} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$ ,  $z \in G (= \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \geq 1\})$  der fås ved at integrere langs linjestykket fra 0 til  $z$  (eller via vej) er holomorft i  $G$  og stamfunktion til  $1/\sqrt{1-z^2}$  (B.p.89)

Argumentfunktion Lad  $\theta : A \rightarrow \mathbb{R}$  være kontinuert argumentfunktion for en kurvesammenhængende  $A \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Så er for hvert  $p \in \mathbb{Z}$  også  $\theta + 2\pi p$  en kontinuert argumentfunktion for  $A$ , og der er ikke andre. (B.L.5.8 (p.80))

Lad  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  være kontinuert kurve, der forløber helt i en cirkelskive  $K(z_0, r) \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Så findes en kontinuert argumentfunktion langs kurven (B.L.5.9 (p.80))

Lad  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  være kontinuert kurve, der ikke passerer gennem 0. Så findes en kontinuert argumentfunktion  $\theta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  langs  $\gamma$  og enhver kontinuert argumentfunktion langs  $\gamma$  er givet som  $\theta(t) + 2p\pi$  for passende fast  $p \in \mathbb{Z}$  (B.S.5.10 (p.81)) (Bemærk - billedet  $\gamma^*$  har ikke nødvendigvis kontinuert argumentfunktion).

Ethvert enkeltsammenhængende område  $G \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$  har en kontinuert argumentfunktion (B.S.5.14 (p.85))

Borels overdæknings-sætning Lad  $K$  være en afsluttet og begrænset mængde i  $\mathbb{C}$  (eller generelt  $\mathbb{R}^k$ ). Til enhver familie  $(G_i)_{i \in I}$  af åbne mængder i  $\mathbb{R}^k$  som overdækker  $K$ , dvs.  $K \subseteq \cup_{i \in I} G_i$  findes endeligt mange indices  $i_1, \dots, i_n$  så  $K \subseteq G_{i_1} \cup \dots \cup G_{i_n}$  (B.S.4.13 (p.64))

Differentiabilitet Cauchy-Riemann:  $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$  komplekst differentiable i  $z_0 = x_0 + iy_0 \Leftrightarrow$  1)  $u, v$  begge differentiable i  $(x_0, y_0)$  og 2) Cauchy-Riemann differentialligningerne opfyldt:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

i  $z_0$  -  $f$  er holomorft i  $G$ , hvis disse betingelser gælder i  $G$ . (B.S.1.6 (p.14))

Lad  $f \in \mathcal{H}(G)$ ,  $G$  åben. Så er  $f$  vilkårligt ofte differentiable. (PB.S.4.8 (p.60))

Diskret mængde Lad  $G \subseteq \mathbb{C}$  åben. En diskret mængde  $A \subseteq G$  er tællelig og  $G \setminus A$  er åben (B.S.5.6 (p.77))

Eksponential-funktionen Potensrække:  $\exp(z) = \sum_0^\infty \frac{z^n}{n!}$  med  $\rho = \infty$  og  $\exp'(z) = \exp(z)$  (B.F.(1),(2) (p.19))

Funktionaligning:  $\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \exp(z_2)$  (B.S.1.15 (p.20)).

Eulers formel:  $\exp(iz) = \cos z + i \sin z = \exp(x)(\cos y + i \sin y)$  ( $z = x + iy$ ),  $\exp(i\theta) = \cos \theta + i \sin \theta$  (B.S.1.16 (p.21))

$|e^z| = e^x$ ,  $e^{2\pi i} = 1$ ,  $e^{i\pi} = -1$  (B.S.1.16 (p.22))

Ekspontialfunktionen er periodisk med periode  $2\pi i$  (B.p.22)

Ligningen  $\exp(z) = 1$  har løsningerne  $z = 2\pi ip, p \in \mathbb{Z}$  (B.S.1.18 (p.23))

**Estimationslemma** Lad  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  være parameterfremstilling for en vej. For kontinuert funktion  $f : \gamma^* \rightarrow \mathbb{C}$  gælder  $\left| \int_{\gamma} f \right| \leq \max_{z \in \gamma^*} |f(z)| L(\gamma) = \max_{t \in [a, b]} |f(\gamma(t))| L(\gamma)$  (B.L.2.8 (p.34)) Ofte findes vurdering  $|f(z)| \leq K \forall z \in \gamma^*$ , så  $\max_{\gamma^*} |f| \leq K$ . Da fås  $\left| \int_{\gamma} f \right| \leq KL(\gamma)$ . (B.p.34).

**Faktorisering** Lad  $f \in \mathcal{H}(G)$  og antag, at  $f$  ikke er identisk 0. Hvis  $a \in G$  er et nulpunkt for  $f$  (dvs.  $f(a) = 0$ ), så findes entydigt  $n \in \mathbb{N}$  og en entydig  $g \in \mathcal{H}(G), g(a) \neq 0$  så  $f(z) = (z - a)^n g(z), z \in G$ . Tallet  $n$  kaldes nulpunktets multiplicitet eller orden (B.S.6.1 (p.99))

Ordenen af nulpunktet  $a$  for  $f$  betegnes  $\text{ord}(f, a)$ . Et nulpunkt af orden 1 kaldes et simpelt nulpunkt (B.p.100)

Lad  $G$  være et område i  $\mathbb{C}$  og antag, at  $f \in \mathcal{H}(G)$  kun har endeligt mange nulpunkter i  $G$ . Da findes et polynomium  $p(z)$  og en nulpunktsfri funktion  $\varphi \in \mathcal{H}(G)$ , så  $f(z) = p(z)\varphi(z), z \in G$ . (Opg. 6.1 (p.120))

**Fliselemma** Lad  $G \subseteq \mathbb{C}$  åben og  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  kontinuert kurve, der forløber helt i  $G$ . Der findes endeligt mange delepunkter  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$  i  $[a, b]$  og en radius  $r > 0$ , så  $\cup_0^n K(\gamma(t_i), r) \subseteq G$  og så  $\gamma([t_i, t_{i+1}]) \subseteq K(\gamma(t_i), r), i = 0, 1, \dots, n-1$  (B.L.5.2 (p.76))

**Harmonisk funktion** Lad  $u$  være reel  $C^2$  funktion, der er harmonisk i et enkeltsammenhængende område  $G \subseteq \mathbb{R}^2 \sim \mathbb{C}$ . Så findes en holomorf funktion  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  med  $\text{Re} f = u$ , og  $f$  er fastlagt på nær addition af en rent imaginær konstant. (Begge veje gælder) (B.S.4.10 (p.63))

**Hel funktion, billede** Picards sætning: For en ikke-konstant hel funktion  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  er enten  $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$  eller  $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{a\}$  for passende  $a \in \mathbb{C}$ . Hvis  $f$  ikke er et polynomium, er  $f^{-1}(\{w\})$  en uendelig mængde for alle  $w \in \mathbb{C}$  på nær højst et enkelt. (B.S.4.19 (p.67))

**Holomorfi** Moreras sætning: Lad  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  ( $G$  åben) være kontinuert i område  $G \subseteq \mathbb{C}$ . Hvis  $\int_{\gamma} f = 0$  for enhver lukket vej i  $G$  eller blot  $\int_{\partial \Delta} f = 0$  for enhver massiv trekant  $\Delta \subseteq G$ , så er  $f$  holomorf i  $G$  (B.S.4.12 (p.64))

Hvis  $f(z)$  er kontinuert i et enkeltsammenhængende område  $G$  og  $\oint_{\gamma} f(z) dz = 0$  for enhver lukket vej  $\gamma \subseteq G$ , så er  $f$  analytisk på hele  $G$  (WA p.347).

**Hyperbolske funktioner**  $\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$ ,  $\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$  (B.p.23)

Potensrækker  $\sinh z = \sum_0^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$ ,  $\cosh z = \sum_0^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$  med  $\rho = \infty$  (B.p.23).

Differentialkvotienter  $\sinh'(z) = \cosh(z)$ ,  $\cosh'(z) = \sinh(z)$ . (B.p.24)

Sammenhæng med trigonometriske  $\sinh(iz) = i \sin z$ ,  $\sin(iz) = i \sinh z$ ,  $\cosh(iz) = \cos z$ ,  $\cos(iz) = \cosh z$ . (B.p.24). Desuden  $\sin(x + iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$  (B.O.1.12 (p.26))

Idoitformlen  $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$  (B.p.24)

Tan mv.  $\tanh z = \sinh z / \cosh z$ ,  $\coth z = \cosh z / \sinh z$ . Holomorfe i  $\mathbb{C} \setminus \{i\pi/2 + i\pi\mathbb{Z}\}$  hhv.  $\mathbb{C} \setminus i\pi\mathbb{Z}$  (B.p.24)

Identitetssætning for holomorfe funktioner Hvis to holomorfe funktioner  $f, g$  i et område  $G$  stemmer overens i en delmængde  $A \subseteq G$  som har et fortætningspunkt i  $G$ , da er  $f(z) = g(z)$  for alle  $z \in G$  (B.S.6.5 (p.101))

Integration  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  kontinuert. Trekantsuligheden  $\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt$  gælder (B.S.2.1 (p.29)) (idet  $\operatorname{Re} w \leq |\operatorname{Re} w| \leq |w|$ )

Hvis  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  kontinuert,  $G \subseteq \mathbb{C}$  område, og  $F : G \rightarrow \mathbb{C}$  stamfunktion for  $f$ , gælder  $\int_\gamma f(z) dz = F(z_2) - F(z_1) = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$  for enhver vej  $\gamma$  fra  $z_1$  til  $z_2$ . Specielt gælder  $\int_\gamma f = 0$  for enhver lukket vej  $\gamma$  (B.S.2.11 (p.35))

Cauchys integralsætning :  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  holomorf i enkeltsammenhængende område  $G \subseteq \mathbb{C}$ . Lad  $\gamma$  være en lukket vej i  $G$ . Da gælder  $\int_\gamma f(z) dz = 0$  (B.S.3.1 (p.42)) (brug evt. lukkede trappelinjer)

Cauchys integralsætning for stjerneformet område: Lad  $G \subseteq \mathbb{C}$  være stjerneformet område og  $f \in \mathcal{H}(G)$ . For enhver lukket vej  $\gamma$  i  $G$  gælder  $\int_\gamma f(z) dz = 0$  (B.S.3.3 (p.45))

Cauchys integralformel: Lad  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  være holomorf i åben mængde  $G$  og antag, at  $\overline{K(a, r)} \subseteq G$  (plads til en lidt større cirkelskive). For alle  $z_0 \in K(a, r)$  gælder (idet cirklen gennemløbes en gang mod uret)

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K(a, r)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

(B.S.3.8 (p.48)). Desuden gælder (ved differentiation under integraltegnet) (B.S.4.8 (p.60))

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial K(a, r)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, n \in \mathbb{N}_0$$

Udvidet version: Lad  $f \in \mathcal{H}(G)$ ,  $G$  enkeltsammenhængende område. Lad  $\gamma$  være en lukket vej i  $G$ . Da er  $\omega(\gamma, z_0) f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz, z_0 \in G \setminus \gamma^*$  (Opg. 6.8 (p.121))

Middelværdikorollar: Lad  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  holomorf i åben mængde  $G$  med  $\overline{K(a, r)} \subseteq G$ . Da gælder  $f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta}) d\theta$ , dvs. værdien i centrum er lig middelværdien af værdierne på periferien. (B.K.3.9 (p.49))

Stamfunktion: Enhver holomorf funktion i et enkeltsammenhængende område har en stamfunktion (B.S.3.5 (p.46)).

Goursats lemma:  $G \subseteq \mathbb{C}$  åben,  $f \in \mathcal{H}(G)$ . Da er  $\int_{\partial \Delta} f(z) dz = 0$  for enhver massiv trekant  $\Delta \subseteq G$  (B.L.3.2 (p.43))

Cauchys residuesætning: Lad  $G$  være enkeltsammenhængende område og lad  $P = \{a_1, \dots, a_n\} \in G$ . Lad  $\gamma$  være en simpel lukket vej i  $G$  som omslutter  $a_1, \dots, a_n$  og som gennemløbes en gang med positiv orientering. For  $f \in \mathcal{H}(G \setminus P)$  gælder

(B.S.7.1 (p.125)) (Bemærk, polernes orden er uden betydning)

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_1^n \text{Res}(f, a_j)$$

Lad  $f$  være en rational funktion  $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{a_0 + a_1 z + \dots + a_m z^m}{b_0 + b_1 z + \dots + b_n z^n}$ ,  $a_m \neq 0$ ,  $b_n \neq 0$  og antag, at  $n \geq m + 2$  og at  $f$  ikke har nogen poler på den reelle akse. Så er  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_1^k \text{Res}(f, z_j)$  hvor  $z_j$  er polerne i den øvre halvplan (B.S.7.8 (p.133)). (I nedre halvplan ændres fortegn (B.p.134))

Lad  $f$  være en meromorf funktion i  $\mathbb{C}$  uden poler på den reelle akse og med kun endeligt mange poler  $z_j$  i den øvre halvplan. Hvis  $\max_{0 \leq t \leq \pi} |f(Re^{it})| \rightarrow 0$ ,  $R \rightarrow \infty$  så vil  $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) e^{i\lambda x} dx = 2\pi i \sum_1^k \text{Res}(f(z) e^{i\lambda z}, z_j)$ ,  $\lambda > 0$  (B.S.7.10 (p.134)) (I nedre halvplan ændres fortegn og  $\lambda < 0$ ) (B.p.135)

Lad  $h : G \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  være meromorf i et enkeltssammenhængende område  $G$  og lad  $\gamma$  være en positivt orienteret simpel lukket ved i  $G$ , der ikke går igennem nogen af  $h$ 's nulpunkter og poler. Så er

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{h'(z)}{h(z)} dz = N - P$$

lig med antallet  $N$  af nulpunkter minus antallet  $P$  af poler for  $h$  i det delområde af  $G$  som  $\gamma$  omslutter. Ved udregningen tælles et nulpunkt eller en pol af orden  $m$  som tallet  $m$  (B.S.7.3 (p.128))

Jacobi-determinant  $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ . Jacobi-determinanten er (B.p.16)

$$\det J = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 = |f'|^2$$

Konstante funktioner  $f \in \mathcal{H}(G)$ ,  $G \subseteq \mathbb{C}$  område.

- Hvis  $f'(z) = 0$  i alle  $z \in G$ , så er  $f$  konstant (B.S.1.9 (p. 16)).
- Hvis  $f$  kun har reelle værdier er  $f$  konstant (B.K.1.10 (p.16))
- Hvis  $|f|$  er konstant er  $f$  konstant (B.O.1.7 (p.25))
- En begrænset hel funktion er konstant (Liouvilles sætning) (B.S.4.20 (p.67)) (ditto for  $f(z)$  analytisk og begrænset (WA. p.348))
- Lad  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  være kontinuert på kurvesammenhængende  $A \subseteq \mathbb{C}$ . Hvis  $f(A)$  er diskret i  $\mathbb{C}$  er  $f$  konstant (B.S.5.7 (p.78))
- Se også identitetssætningen

Kontinuitet  $f$  kontinuert ensbetydende med, at  $\text{Re} f$  og  $\text{Im} f$  begge kontinuerte (B.p.6)

For  $f \in \mathcal{H}(G)$ ,  $G$  åben er  $f'$  kontinuert (P.Bem. 4.9 (p.62)).

Lad  $M \subseteq \mathbb{C}$  og  $f_n : M \rightarrow \mathbb{C}$  uniformt konvergent mod  $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ . Hvis alle  $f_n$  er kontinuerte i  $z_0 \in M$ , så er  $f$  også kontinuert i  $z_0$  (B.S.4.2 (p.57))

Konvergens, kompakt uniform Lad  $G \subseteq \mathbb{C}$  åben. En følge af funktioner  $f_n : G \rightarrow \mathbb{C}$  konvergerer lokalt uniformt

mod  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  hviss: For hver afsluttet og begrænset delmængde  $K \subseteq G$  vil  $f_n(z) \rightarrow f(z)$  uniformt for  $z \in K$  (B.S.4.15 (p.65))

Konvergens, lokal uniform

Lad  $G \subseteq \mathbb{C}$  åben. Hvis en følge af funktioner  $f_n : G \rightarrow \mathbb{C}, f_n \in \mathcal{H}(G)$  konvergerer lokalt uniformt på  $G$  mod  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ , da er  $f \in \mathcal{H}(G)$  Følgen af afledede  $f'_n$  konvergerer lokalt uniformt mod  $f'$  på  $G$  (B.S.4.17 (p.66)) (Det gælder også for  $n$ 'te afledede (B.p.66))

Konvergens, rangorden

Punktvis konvergens svagere end lokal/kompakt uniform konvergens svagere end uniform konvergens (B.p.65)

Konvergensradius

Lad  $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus P), P \subseteq \mathbb{C}$  diskret i  $\mathbb{C}$  og antag, at ingen af  $f$ 's singulariteter  $a \in P$  er hævelige. For hvert  $z_0 \in \mathbb{C} \setminus P$  fremstilles  $f$  ved en potensrække  $f(z) = \sum_0^\infty a_n(z - z_0)^n$  i den største åbne cirkelskive  $K(z_0, \rho) \subseteq \mathbb{C} \setminus P$ , og  $\rho = \inf\{|z_0 - a| | a \in P\}$  er konvergensradius. (B.S.6.24,p.118-119)

Laurentrække

Antag, at  $f$  er holomorf i ringområdet  $G = \{z \in \mathbb{C} | R_1 < |z - a| < R_2$  hvor  $0 \leq R_1 < R_2 \leq \infty$ . Så fremstilles  $f$  i  $G$  som sum af en entydigt bestemt Laurenttrække  $f(z) = \sum_{-\infty}^\infty c_n(z - a)^n, z \in G$ , og koefficienterne i rækken er givet ved  $c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K(a,r)} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz, n \in \mathbb{Z}$ , hvor  $r \in ]R_1, R_2[$  er vilkårlig. (B.S.6.17 (p.111))

L'Hospitals regel

Antag, at  $f, g \in \mathcal{H}(G)$  ikke er identisk 0 i en omegn af  $a \in G$ . Grænseværdien  $\lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z)}{g(z)}$  eksisterer hviss  $\text{ord}(f, a) \geq \text{ord}(g, a)$ , og så gælder  $\lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f^{(q)}(a)}{g^{(q)}(a)}$  hvor  $q = \text{ord}(g, a)$  og dermed  $g^{(q)}(a) \neq 0$  (B.S.6.7 (p.102))

Logaritme

Lad  $G \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$  område. Hvis der findes en kontinuert argumentfunktion  $\alpha$  for  $G$ , så er  $l(z) = \log |z| + i\alpha(z), z \in G$  en holomorf gren af logaritmen, og den er stamfunktion til  $1/z$ , dvs.  $l'(z) = 1/z$ . (B.S.5.14 (p.85)).

Også  $l(z) + 2\pi ip, p \in \mathbb{Z}$  er holomorf gren af logaritmen på  $G$ , og der er ikke andre (P.Bem. 5.15 (p.86))

For  $|z| < 1$  gælder potensrækkeudviklingen  $\text{Log}(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - + \dots = \sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n$  med konvergensradius 1 (B.S.5.16, (p.86))

Lad  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$  være en vej, der ikke passerer 0. Så er  $\int_\gamma \frac{dz}{z} = \log \left| \frac{\gamma(b)}{\gamma(a)} \right| + i \arg \gamma$ . Hvis  $\gamma$  er lukket er omløbstallet om 0 givet ved  $\omega(\gamma, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z}$  - altså et helt tal! (B.S.5.23 (p.90))

Der gælder tilsvarende for lukket vej  $\gamma$ , at  $\omega(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z-z_0}, z_0 \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$  (B.p.94)

$n$ 'te rødder

Lad  $n \in \mathbb{N}$  være givet. Funktionen  $z^n$  afbilder vinkelrummet  $\{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} | |\text{Arg } z| < \pi/n\}$  bijektivt på  $\mathbb{C}_\pi$ . Den omvendt funktion  $\rho_n(z) = (|z|^{1/n})e^{i \text{Arg } z/n}$  er en holomorf gren af  $z^{1/n}$  på  $\mathbb{C}_\pi$  (B.S.5.13 (p.83)). Der gælder  $\frac{d}{dz} z^{1/n} = \frac{z^{1/n-1}}{n}$

Nulpunkt, isoleret

Lad  $f \in \mathcal{H}(G)$  og antag, at  $f$  ikke er identisk 0. Ethvert nulpunkt  $a$  for  $f$  er isoleret i den forstand, at der findes  $r > 0$  så  $f(z) \neq 0$  for  $z \in K'(a, r)$ . Mængden  $Z(f)$  af nulpunkter for  $f$  er diskret i  $G$ , specielt er  $Z(f)$  tællelig (B.S.6.3 (p. 101))

Der gælder også, at hvis  $P \subseteq G$  er diskret i  $G$ , så findes  $f \in \mathcal{H}(G)$  så  $Z(f) = P$  (B.p.101)

Exp er nulpunktsfri i  $\mathbb{C}$ , sin  $z$  har numerable nulpunkter  $z = p\pi, p \in \mathbb{Z}$ ,  $\sin(1/z)$  på  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  har nulpunkter  $(p\pi)^{-1}, p \in \mathbb{Z}$  (B.p.101)

Nulpunkt, orden

Lad  $f \in \mathcal{H}(G)$  og antag, at  $f$  ikke er identisk 0. For et nulpunkt  $a \in G$  er ordenen  $n$  karakteriseret ved  $f(a) = f'(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0, f^{(n)}(a) \neq 0$  (B.K.6.2 (p.101))

Lad  $f, g \in \mathcal{H}(G)$  hvor  $G$  er et enkeltsammenhængende område. Lad  $\gamma$  være en simpel lukket vej i  $G$  og antag at  $|f(z) - g(z)| < |f(z)|, z \in \gamma^*$ . Så har  $f$  og  $g$  samme antal nulpunkter talt med multiplicitet i det begrænsede område, som  $\gamma$  omslutter (Rouches sætning) (B.S.7.5 (p.130))

Nulpunkter og poler, argumentprincippet

Lad  $h : G \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  være meromorf i et enkeltsammenhængende område  $G$  og lad  $\gamma$  være en positivt orienteret simpel lukket ved i  $G$ , der ikke går igennem nogen af  $h$ 's nulpunkter og poler. Så er

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{h'(z)}{h(z)} dz = N - P$$

lig med antallet  $N$  af nulpunkter minus antallet  $P$  af poler for  $h$  i det delområde af  $G$  som  $\gamma$  omslutter. Ved udregningen tælles et nulpunkt eller en pol af orden  $m$  som tallet  $m$  (B.S.7.3 (p.128))

argvar( $\Gamma$ ) =  $2\pi(N - P)$  - da  $\frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{h'(\gamma(t))\gamma'(t)}{h(\gamma(t))} dt = \omega(\Gamma, 0)$  (B.7.4, s.129)

Ombytning af grænseovergange

Lad  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  vej i  $\mathbb{C}$  og lad  $f_n : \gamma^* \rightarrow \mathbb{C}$  være følge af kontinuerte funktioner. (B.S.4.6 (p.59))

- Hvis  $f_n \rightarrow f$  uniformt på  $\gamma^*$  gælder  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma} f_n = \int_{\gamma} f = \int_{\gamma} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$
- Hvis  $\sum_0^{\infty} f_n$  konvergerer uniformt mod  $s : \gamma^* \rightarrow \mathbb{C}$  på  $\gamma^*$  gælder  $\sum_0^{\infty} \int_{\gamma} f_n = \int_{\gamma} s = \int_{\gamma} \sum_0^{\infty} f_n$ .

Omløbstal om 0

Omløbstallet omkring 0 er givet som  $\omega(\gamma, 0) = \sum_0^{n-1} \text{sign}(A_k)$  altså antallet af gange  $\gamma$  krydser  $L$  i positiv omløbsretning minus antallet af gange  $\gamma$  krydser  $L$  i negativ omløbsretning (B.S.5.24 (p.91-92))

Omløbstal om  $z$

Omløbstallet omkring  $z \in G$  er givet som  $\omega(\gamma, z) = \omega(\gamma - z, 0)$  idet  $\gamma - z : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  er kurven  $t \rightarrow \gamma(t) - z$  som ikke passerer 0, (B.p.93)

Lad  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  være lukket kontinuert kurve. Omløbstallet  $\omega(\gamma, \cdot) : \mathbb{C} \setminus \gamma^* \rightarrow \mathbb{Z}$  er konstant i hvert af komponenterne af  $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$  (B.S.5.25 (p.94))

Område

En åben kurvesammenhængende mængde  $G \subseteq \mathbb{C}$  er et område i den forstand at to vilkårlige punkter i  $G$  kan forbindes med en trappelinje (B.S.5.3 (p.76))

Om et område  $G \subseteq \mathbb{C}$  er følgende betingelser ensbetydende (B.S.5.18 (p.88))

- $G$  er enkeltsammenhængende
- Alle  $f \in \mathcal{H}(G)$  har en stamfunktion
- For alle  $f \in \mathcal{H}(G)$  og enhver lukket vej  $\gamma$  i  $G$  gælder  $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$
- Alle nulpunktsfri  $f \in \mathcal{H}(G)$  har en holomorf logaritme, dvs.  $l \in \mathcal{H}(G)$  så  $\exp(l) = f$

- Alle nulpunktsfri  $f \in \mathcal{H}(G)$  har en holomorf kvadratrod, dvs.  $g \in \mathcal{H}(G) : g^2 = f$
- Enhver nulpunktsfri  $f \in \mathcal{H}(G)$  findes en holomorf gren af  $f^\alpha = \exp(\alpha l)$  hvor  $\alpha \in \mathbb{C}$  og  $l$  er en holomorf gren af logaritmen til  $f$

Riemanns afbildningssætning: Lad  $G$  være et enkeltsammenhængende område,  $G \neq \mathbb{C}$ . Så findes en bijektiv holomorf funktion  $\varphi : G \rightarrow K(0, 1)$ . (B.S.5.19 (p.88)). Den omvendte funktion  $\varphi^{-1}$  er også holomorf.

Pol

Antag  $f \in \mathcal{H}(G \setminus \{a\})$  har en pol af orden  $m$  i  $a$ . Funktionen

$$g(z) = \begin{cases} (z-a)^m f(z), & z \in G \setminus \{a\} \\ \lim_{z \rightarrow a} (z-a)^m f(z), & z = a \end{cases}$$

er da holomorf i  $G$  og har potensrække  $g(z) = \sum_0^\infty a_n (z-a)^n$  i den største åbne cirkelskive  $K(a, \rho) \subseteq G$ . Der gælder for  $z \in K'(a, \rho)$ , at

$$f(z) = \frac{a_0}{(z-a)^m} + \frac{a_1}{(z-a)^{m-1}} + \dots + \frac{a_{m-1}}{z-a} + \sum_0^\infty a_{m+k} (z-a)^k.$$

Funktionen  $p(1/(z-a)) = \sum_1^m \frac{a_{m-k}}{(z-a)^k}$  hvor  $p(z) = \sum_1^m a_{m-k} z^k$  kaldes den principale del af  $f$  i  $a$ . Når man trækker den principale del fra  $f$  får man en holomorf funktion med en hævelig singularitet i  $a$ , så singulariteten er koncentreret i den principale del af  $f$ . (B.p. 104)

Polynomiers division

Lad  $d \in \mathbb{C}[z]$  (dvs. polynomium) være forskellig fra nulpolynomiet. Til  $p \in \mathbb{C}[z]$  findes entydigt bestemte polynomier  $q, r \in \mathbb{C}[z]$  så  $p = qd + r$ ,  $\text{grad}(r) < \text{grad}(d)$ . Polynomierne  $d, q, r$  kaldes heholdsvis divisor, kvotient og rest. Hvis  $d, p$  har reelle koefficienter, så gælder det også for  $q, r$ . (B.S.4.22 (p.68))

Polynomiers rødder

Et polynomium  $p(z)$  af grad  $n \geq 1$  har netop  $n$  rødder i  $\mathbb{C}$ , regnet med multiplicitet (B.K.4.25 (p.69))

Potensfunktion

Binomialrækken: Lad  $\alpha \in \mathbb{C}$ . For  $|z| < 1$  gælder  $(1+z)^\alpha = \exp(\alpha \text{Log}(1+z)) = \sum_0^\infty \binom{\alpha}{n} z^n$  (B.S.5.17 (p.87))

Potensrækker

En potensrække,  $\sum_0^\infty a_n z^n$  og dens ledvist differentierede  $\sum_1^\infty a_n n z^{n-1} = \sum_0^\infty a_{n+1} (n+1) z^n$  har samme konvergensradius (B.L.1.11 (p.17))

Den ved potensrækken  $\sum_0^\infty a_n z^n$  fremstillede funktion  $f$  er holomorf i konvergenscirkelskiven  $K(0, \rho)$  og  $f'(z) = \sum_{n=1}^\infty n a_n z^{n-1}$  for  $|z| < \rho$  (B.S.1.12 (p.17))

Desuden er  $f$  vilkårligt ofte differentiabel i  $K(0, \rho)$  og  $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$ ,  $k = 0, 1, \dots$

Dermed er potensrækken sin egen Taylorrække omkring 0,

$$f(z) = \sum_{n=0}^\infty \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n, |z| < \rho. \quad (\text{B.K.1.13 (p.19)})$$

Lad potensrækkerne  $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n, g(z) = \sum_0^\infty b_n z^n$  have konvergensradier  $\rho_1, \rho_2$ . Hvis der findes  $0 < \rho \leq \min(\rho_1, \rho_2)$  så  $f(z) = g(z)$  for  $|z| < \rho$ , så er  $a_n = b_n$  for alle  $n$ . (B.S.1.14 (p.19))

En potensrække  $\sum_0^\infty a_n z^n$  med konvergensradius  $\rho$  og sumfunktion  $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n, z \in K(0, \rho)$  konvergerer uniformt mod  $f$  på enhver lukket cirkelskive  $\bar{K}(0, r)$  med  $r < \rho$  (Men ikke nødvendigvis på  $K(0, \rho)$ ). (B.S.4.5 (p.58))

Potensrække,  
kriterier for  
konvergensradius

Givet en potensrække  $\sum_{n=0}^\infty a_n (z-b)^n$ ,  $a_n, b \in \mathbb{C}$ , hvor der findes et  $N \in \mathbb{N}$ , så

$a_n \neq 0$  for  $n \geq N$ .

1. Hvis grænseværdien  $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$  eksisterer, da er  $R$  konvergensradius for potensrækken. (Kvotientkriteriet)
2. Hvis grænseværdien  $R = \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{-1/n}$  eksisterer, da er  $R$  konvergensradius for potensrækken (Rodkriteriet).

Bemærk i begge tilfælde kan  $R$  godt være  $\infty$ . (S.S.5.2.3)

Rational funktion	Dekomponering: Lad $r, q \in \mathbb{C}[z]$ være uden fælles nulpunkter, $0 \leq \text{grad}(r) < \text{grad}(q)$ , og lad $a_1, \dots, a_k$ være nulpunkterne for $q$ med multipliciteter $m_1, \dots, m_k$ . Der findes entydigt bestemte konstanter $c_{j,l} \in \mathbb{C}$ så $\frac{r(z)}{q(z)} = \sum_{j=1}^k \sum_{l=1}^{m_j} \frac{c_{j,l}}{(z-a_j)^l}$ . Formlen udtrykker, at den rationale funktion er sum af sine principale dele. (B.S.6.12 (p.106))
Regneregler bevarer holomorfi	Mængden $\mathcal{H}(G)$ i en åben $G \subseteq \mathbb{C}$ er stabil ved addition, subtraktion, multiplikation, og (såfremt nævneren aldrig=0) division. (B.S.1.3 (s.1.2)). Sædvanlige regneregler for differentiation gælder, herunder sammensatte funktioner og inverse: Lad $f \in \mathcal{H}(G)$ være injektiv. Så er $f(G)$ åben i $\mathbb{C}$ og $f^{-1}'(f(z)) = \frac{1}{f'(z)}$ (B.S.1.4 (p.12))
Residuer, beregning	Antag, at $h$ har en simpel pol i $a$ . Så er $\text{Res}(h, a) = \lim_{z \rightarrow a} (z-a)h(z)$ . (B.p.126)  Antag, at $h = f/g$ er meromorf med en simpel pol i $a$ og at $f(a) \neq 0, g(a) = 0, g'(a) \neq 0$ . Så er $\text{Res}(h, a) = f(a)/g'(a)$ (B.p.127)  Antag, at $h$ har en pol af orden $m \geq 1$ i $a$ . Idet vi definerer $\varphi$ ved $\varphi(z) = (z-a)^m h(z)$ så $\varphi$ har en hævelig singularitet i $a$ er $\text{Res}(h, a) = \frac{\varphi^{(m-1)}(a)}{(m-1)!}$ (B.p.127)
Rouches sætning	Lad $f, g \in \mathcal{H}(G)$ hvor $G$ er et enkeltssammenhængende område. Lad $\gamma$ være en simpel lukket vej i $G$ og antag at $ f(z) - g(z)  <  f(z) , z \in \gamma^*$ . Så har $f$ og $g$ samme antal nulpunkter talt med multiplicitet i det begrænsede område, som $\gamma$ omslutter (Rouches sætning) (B.S.7.5 (p.130))
Singularitet, Carosati-Weierstrass	Hvis $f \in \mathcal{H}(G \setminus \{a\})$ har en essentiel singularitet i $a$ , så er $f(K'(a, r))$ overalt tæt i $\mathbb{C}$ for ethvert $r > 0$ hvor $K(a, r) \subseteq G$ (bem. $A \subseteq \mathbb{C}$ overalt tæt hvis $\bar{A} = \mathbb{C}$ ) (B.S.6.11 (p.105))
Singularitet, hævelig	Antag $f \in \mathcal{H}(G \setminus \{a\})$ , $f$ ikke identisk 0, og at $f$ er begrænset i $K'(a, r)$ for $r > 0$ . Så har $f$ en hævelig singularitet i $a$ . (B.S.6.9 (p.103))
Singularitet, afgørelse af type	Den isolerede singularitet $a$ for $f \in \mathcal{H}(G \setminus \{a\})$ med Laurenttrækken $f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n, z \in K'(a, \rho)$ er (B.S.6.21 (p.116)) <ul style="list-style-type: none"> <li>• hævelig hviss <math>c_n = 0</math> for <math>n &lt; 0</math></li> <li>• pol hviss <math>c_n = 0</math> for alle <math>n &lt; 0</math> på nær endeligt mange. Polens orden er det største <math>m &gt; 0</math> så <math>c_m \neq 0</math></li> <li>• essentiel hviss <math>c_n \neq 0</math> for uendeligt mange <math>n &lt; 0</math></li> </ul>
Spejlings-princippet	Lad $G \subseteq \mathbb{C}$ åben og $f \in \mathcal{H}(G)$ . Den i x-aksen spejlede mængde og funktion defineres ved $G^* = \{z \in \mathbb{C}   \bar{z} \in G\}$ , $f^* : G^* \rightarrow \mathbb{C}, f^*(z) = f(\bar{z}), z \in G^*$ . Der gælder, at $f^* \in \mathcal{H}(G^*)$ og $(f^*)' = (f')^*$ (Opg. 6.3.1 (p.120))

Hvis  $G$  er spejlingsinvariant, dvs.  $G = G^*$  er  $G \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$ .

$f \in \mathcal{H}(G)$  er reel på  $G \cap \mathbb{R}$  hvis  $f$  er spejlingsinvariant ( $f = f^*$  eller  $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$ ) (Opg. 6.3.2 (p.120))

En hel funktion  $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$  er spejlingsinvariant hvis  $a_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}_0$  (Opg. 6.3.3 (p.120))

## Stamfunktion

Lad  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  kontinuert,  $G \subseteq \mathbb{C}$  område, og antag  $\int_\gamma f = 0$  for enhver lukket trappelinje i  $G$ . Da har  $f$  en stamfunktion (givet ved  $F = \int_{\gamma_z} f$  med  $\gamma_z$  trappelinje fra  $z_0$  til  $z$ ) (B.L.2.12 (p.36))

For kontinuert  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  på område  $G \subseteq \mathbb{C}$  er følgende ensbetydende

- $f$  har stamfunktion
- For vilkårlige  $z_1, z_2 \in G$  har  $\int_\gamma f$  samme værdi for enhver vej  $\gamma$  i  $G$  fra  $z_1$  til  $z_2$
- $\int_\gamma f = 0$  for enhver lukket vej i  $G$ .

Når betingelserne er opfyldt finder man en stamfunktion  $F$  til  $f$  ved at vælge  $z_0 \in G$  og sætte  $F(z) = \int_\gamma f$  hvor  $\gamma$  er vilkårlig vej (f.eks. trappelinje) i  $G$  fra  $z_0$  til  $z$  (B.S.2.13 (p.38))

Hvis  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  i område  $G \subseteq \mathbb{C}$  har en stamfunktion, da er den ( $f$ ) holomorft (B.S.4.11 (p.64))

## Taylorrække

Lad  $f \in \mathcal{H}(G), G$  åben. Så er for alle  $a \in G$  Taylorrækken med centrum  $a$  konvergent med sum  $f$  i den største åbne cirkelskive  $K(a, \rho) \subseteq G$ :  $f(z) = \sum_0^\infty \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z - a)^n, z \in K(a, \rho)$  (B.S.4.8 (p.60))

$f$  er altså analytisk, faktisk  $C^\infty$  (B.p.62),

## Trigonometriske funktioner

Potensrækker  $\sin z = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \cos z = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$  med  $\rho = \infty$  (B.(7)-(8) (p.21))

$$\text{Euler: } \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

Additionsformler:  $\sin(\theta_1 + \theta_2) = \sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2, \cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2$  (B (10)-(11) (p.22)).

De Moivre:  $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$  (B p.22)

$\tan z = \sin z / \cos z$  og  $\cot z = \cos z / \sin z$  er holomorfe i  $\mathbb{C} \setminus \{\pi/2 + \pi\mathbb{Z}\}$  og  $\mathbb{C} \setminus \pi\mathbb{Z}$  (B.p.23)

$\tan^{(n)} z = \sum_0^{n+1} a_{n,k} \tan^k z$  med  $a_{n,k} \geq 0, a_{n,k} \in \mathbb{Z}$  og  $a_{n,k} = 0$  når  $\text{sign}(n) \neq \text{sign}(k)$ . (B.O.1.17 (p.27))

Weierstrass  
Majorantrække-  
sætning

Lad  $\sum_0^\infty f_n(x)$  være uendelig række af  $f_n : M \rightarrow \mathbb{C}$  og antag, at der findes en konvergent majorantrække, dvs. en konvergent række  $\sum_0^\infty a_n$  med positive led, så  $\forall n \in \mathbb{N}_0 \forall x \in M : |f_n(x)| \leq a_n$ . Så er rækken  $\sum_0^\infty f_n(x)$  uniformt konvergent på  $M$  (B.S.4.4 (p.58))

Åbne mængder Lad  $G \subseteq \mathbb{C}$  være åben og antag at  $\overline{K(a, r)} \subseteq G$ . Da findes  $R > r$  med  $K(a, R) \subseteq G$  (altid plads til en lidt større cirkelskive) (B.L. 3.6 (p.47))

### 3 Symboler

$\arg(z)$	Argument
$\mathbb{C}_\alpha$	Opskåret plan
$\gamma$	Parameterfremstilling for vej
$\gamma^*$	Billedet af $\gamma$
$\mathcal{H}(G)$	Mængden af holomorfe funktioner på $G$
$\text{Im}(z)$	Imaginærdel
$K(a, r)$	Åben cirkelskive
$K'(a, r)$	Udprikket cirkelskive
$\overline{K(a, r)}$	Afsluttet cirkelskive
$\partial K(a, r)$	Rand af cirkelskive
$L(\gamma)$	Længden af vejen
$l(z)$	Logaritmefunktion
$\text{Log } z$	Hovedlogaritme
$\mathcal{M}(G)$	Mængden af meromorfe funktioner på $G$
$\omega(\gamma, 0)$	Omløbstal for $\gamma$ omkring 0
$\text{ord}(f, a)$	Ordenen af nulpunkt $a$ for $f$
$\text{Re}(z)$	Realdel
$\text{Res}(f, a)$	Residuum for $f$ i $a$
$ z $	Modulus
$Z(f)$	Nulpunktsmængde for $f$

### 4 Opskrifter og trix

$$\frac{1}{z(1-z)} = \frac{1}{z} + \frac{1}{1-z} \quad (\text{B.O.1.1 (p.25)})$$

Singularitet, afgørelse af type Den isolerede singularitet  $a$  for  $f \in \mathcal{H}(G \setminus \{a\})$  med Laurenttrækken  $f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$ ,  $z \in K'(a, \rho)$  er (B.S.6.21 (p.116))

- hævelig hvis  $c_n = 0$  for  $n < 0$

- pol hvis  $c_n = 0$  for alle  $n < 0$  på nær endeligt mange. Polens orden er det største  $m > 0$  så  $c_m \neq 0$
- essentiel hvis  $c_n \neq 0$  for uendeligt mange  $n < 0$

Residuer, beregning     Antag, at  $h$  har en simpel pol i  $a$ . Så er  $\text{Res}(h, a) = \lim_{z \rightarrow a} (z - a)h(z)$ . (B.p.126)

Antag, at  $h = f/g$  er meromorf med en simpel pol i  $a$  og at  $f(a) \neq 0, g(a) = 0, g'(a) \neq 0$ . Så er  $\text{Res}(h, a) = f(a)/g'(a)$  (B.p.127)

Antag, at  $h$  har en pol af orden  $m \geq 1$  i  $a$ . Idet vi definerer  $\varphi$  ved  $\varphi(z) = (z-a)^m h(z)$  så  $\varphi$  har en hævelig singularitet i  $a$  er  $\text{Res}(h, a) = \frac{\varphi^{(m-1)}(a)}{(m-1)!}$  (B.p.127)

Nulpunkter og poler     Lad  $h : G \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  være meromorf i et enkeltsammenhængende område  $G$  og lad  $\gamma$  være en positivt orienteret simpel lukket vej i  $G$ , der ikke går igennem nogen af  $h$ 's nulpunkter og poler. Så er  $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{h'(z)}{h(z)} dz$  lig med antallet  $N$  af nulpunkter minus antallet  $P$  af poler for  $h$  i det delområde af  $G$  som  $\gamma$  omslutter. Ved udregningen tælles et nulpunkt eller en pol af orden  $m$  som tallet  $m$  (B.S.7.3 (p.128))

Potensrække, kriterier for konvergensradius     Givet en potensrække  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-b)^n$ ,  $a_n, b \in \mathbb{C}$ , hvor der findes et  $N \in \mathbb{N}$ , så  $a_n \neq 0$  for  $n \geq N$ .

1. Hvis grænseværdien  $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$  eksisterer, da er  $R$  konvergensradius for potensrækken. (Kvotientkriteriet)
2. Hvis grænseværdien  $R = \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{-1/n}$  eksisterer, da er  $R$  konvergensradius for potensrækken (Rodkriteriet).

Bemærk i begge tilfælde kan  $R$  godt være  $\infty$ . (S.S.5.2.3)

## 5 Gennemregnede eksempler

$\int_{C_r} \frac{dz}{z^n} = \begin{cases} 0, & n \neq 1 \\ 2\pi i, & n = 1 \end{cases}$  (Ex. 2.14, p.38).  $C_r : |z| = r$  (enkelt positivt cirkelgennemløb),  $n \in \mathbb{Z}$ . Konklusion:  $n \neq 1 \rightarrow$  stamfunktion  $z^{1-n}/(1-n)$ ,  $z^{-1}$  ingen stamfunktion i  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

$\int_{\gamma} \frac{z}{(z^2+1)^2} dz = 0$  (Opg. 2.3(p.39)) for  $\gamma$  lukket vej i  $\mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$

$\int_{\gamma} P(z) dz = 0$  (Opg. 2.4(p.39)) for  $\gamma$  lukket vej i  $\mathbb{C}$  og  $P(z)$  polynomium.

$\frac{1}{2i} \int_{\gamma} \bar{z} dz \in \mathbb{R}$  (Opg. 2.5 (p.39)) for  $\gamma$  lukket vej i  $\mathbb{C}$

$\int_{\gamma} f'(z)g(z) dz = - \int_{\gamma} f(z)g'(z) dz$  (Opg. 2.6 (p.39)) for  $f, g \in \mathcal{H}(G)$ ,  $\gamma$  lukket vej i området  $G$ .

$\int_{\partial K(0,2)} \frac{\sin z}{1+z^2} dz = \pi i(e-1/e)$  (Ex. 3.10 (p. 49))

$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2} e^{itb} dt = e^{-\frac{1}{2}b^2}$ ,  $b \in \mathbb{R}$  (Ex. 3.11 (p.50))

$\text{Log } z = \int_{[1,z]} \frac{dt}{t}$ ,  $z \in G$  Stamfunktion til  $1/z$  i  $G = \mathbb{C} \setminus ]-\infty, 0]$  (stjerneformet om 1). (Opg. 3.5, 3.6 (p.52-53))

$\text{Log}(re^{i\theta}) = \log r + i\theta$  for  $z = re^{i\theta}$ ,  $\theta \in ]-\pi, \pi[$ ,  $r > 0$ . (Opg. 3.6 (p.53))

$\text{Arctan } z = \int_0^1 \frac{zdt}{1+t^2z^2}$  på  $G = \mathbb{C} \setminus \{iy \mid |y| \geq 1\}$  (Opg. 3.8 (p.53))

$\text{Arctan } z \in \mathcal{H}(G)$ ,  $\frac{d}{dt} \text{Arctan } z = \frac{1}{1+z^2}$  (Opg. 3.8 (p.53))

$\text{Arctan } z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - + \dots$ ,  $|z| < 1$  (Opg. 3.8 (p.53))

$\int_0^\infty \sin(x^2)dx = \int_0^\infty \cos(x^2)dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$  (Opg. 3.9 (p.53))

$u(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + re^{i\theta})d\theta$  for  $u : G \rightarrow \mathbb{R}$  harmonisk i åben  $G \subseteq \mathbb{C}$  og  $\overline{K(a, r)} \subseteq G$  (Opg. 4.5 (p.70))

$\overline{f(\mathbb{C})} = \mathbb{C}$  for  $f$  ikke-konstant hel funktion (Opg. 4.10 (p.71))

$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg a_2$

$\log(z_1 z_2) = \log z_1 + \log z_2$  for  $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  (Opg.5.2 (p.95))

$\text{Arg}(z_1 z_2) = \text{Arg } z_1 + \text{Arg } a_2$

$\text{Log}(z_1 z_2) = \text{Log } z_1 + \text{Log } z_2$  for  $\text{Re}z_1 > 0$  og  $\text{Re}z_2 > 0$  (men ikke generelt for  $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ) (Opg.5.2 (p.95))

$\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$  har ingen kontinuert argumentfunktion (Opg. 5.4 (p.95))

$\text{Arg}(z^\alpha) = \alpha \text{Arg}(z)$ ,  $|z^\alpha| = |z|^\alpha$ ,  $z \in \mathbb{C}_\pi$  (Opg. 5.8 (p.96))

$G$  åben,  $f \in \mathcal{H}(G)$  nulpunktsfri.  $\log |f|$  er harmonisk i  $G$

$\arg\text{var}(\gamma \cup \delta) = \arg\text{var}(\gamma) + \arg\text{var}(\delta)$  for  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ,  $\delta : [b, c] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ,  $\gamma(b) = \delta(b)$  (Opg.5,5 (p.96))

$(\sum_0^\infty a_n z^n)(\sum_0^\infty b_n z^n) = \sum_0^\infty c_n z^n$ ,  $c_n = \sum_0^n a_k b_{n-k}$  Cauchy-multiplikation (Opg.5.12 (p.97))

## Indeks

- $K(0, 1)$  og område, 12
- $\gamma$ , 3
- $\gamma^*$ , 3
- Åben mængde
  - Cirkelskive, 15
- Afstand, 2
- Analytisk funktion, 14
- Arcsin, 6
- Arg  $z$ , 2
- arg  $z$ , 2, 3
- Argument, 3
- Argumentfunktion, 2, 6
  - og logaritmefunktion, 4
- Argumentprincippet, 9, 11
- Argumentvariation, 2
- argvar, 2
- Begrænset mængde, 2
- Beregning af residuum, 13, 16
- Billede af hel funktion, 7
- Binomialrække, 12
- Borels overdækningsætning, 6
- Carosati-Weierstrass sætning, 13
- Cauchy-multiplikation
  - af potensrækker, 17
- Cauchy-Riemann, 6
  - Jacobi-determinant, 9
- Cauchys integralformel, 8
  - Udvidet, 8
- Cauchys integralsætning, 8
  - For stjerneformet område, 8
- Cauchys residuesætning, 8
- Cirkelskive
  - Åben, 2
  - Udprikket, 2
- De Moivre, 14
- Dekomponering
  - Rational funktion, 13
- Differentiabel funktion, 2
- Differentiabilitet, 6
  - Holomorf funktion, 6
  - Uendelig, 6
- Diskret mængde, 2, 6
- Division af polynomier, 12
- Eksponentialfunktionen
  - Euler, 6
  - $\exp(z)=1$ , 7
  - Periode, 7
  - Potensrække, 6
- Enkeltsammenhængende område, 5, 11
- Essentiel singularitet, 5, 13
- Estimationslemma, 7
- Euler
  - Cos, 14
  - Eksponentialfunktion, 6
  - Sin, 14
- Faktorisering, 7
- Fliselemma, 7
- Forgreningspunkt, 2
- Fortætningspunkt, 2
- Funktion
  - Analytisk, 14
  - Harmonisk, 2
  - Hel, 2
  - Hel, billede, 7
  - Meromorf, 4
  - Rational, 5
- Goursats lemma, 8
- Grænseovergange
  - Ombytning af, 11
- Gren, 2
- Hævelig singularitet, 5, 13
- Harmonisk funktion, 2
  - Holomorfi, 7
- Hel funktion, 2
  - Billede, 7
- Holomorf funktion, 3
  - Harmonisk funktion, 7
  - Hel, 2
  - Hel, billede, 7
  - Moreras sætning, 7
  - Regneregler, 13
  - Stamfunktion, 14
- Holomorf funktion
  - Identitetssætningen, 8
- Holomorf udvidelse, 5
- Homotopi, 5
- Hovedlogaritme, 3
- Hyperbolske funktioner, 7
  - Differentialkvotienter, 7
  - Idiotformlen, 7
  - og trigonometriske, 7
  - Potensrækker, 7
  - Tangens hyperbolsk, 8
- Identitetssætningen for holomorfe funktioner, 8

- Identitetssætningen for potensrækker, 12
- Imaginærdel, 3
- Integrale, 3
  - Estimationslemma, 7
  - Kurveintegrale, 3
  - Kurveintegrale langs vej, 4
- Integration
  - Cauchy for stjerneformet område, 8
  - Cauchys integralformel, 8
  - Cauchys residuesætning, 8
  - Cauchys sætning, 8
  - Goursats lemma, 8
  - Meromorf funktion, 9
  - Middelværdikorollar, 8
  - Poler og nulpunkter, 9, 11
  - Rational funktion, 9
  - Stamfunktion, 8
  - Trekantsulighed, 8
  - Udvidet Cauchys integralformel, 8
- Isoleret nulpunkt, 10
- Isoleret punkt, 3
- Isoleret singularitet, 5
- Jacobi-determinant, 9
- Kompleks funktion, 3
  - Differentiabilitet, 2, 6
  - Hel, 2
  - Holomorf, 3
  - Kontinuitet, 3, 9
- Komplekst tal, 3
  - Argument, 3
  - Imaginærdel, 3
  - Modulus, 3
  - Polære koordinater, 3
  - Realdel, 3
- Konstante funktioner, 9
- Kontinuert funktion, 3
- Kontinuitet, 9
  - og uniform konvergens, 9
- Konveks mængde, 3
- Konvergens
  - Af række, 3
  - Kompakt uniform, 9
  - Lokal uniform, 3, 10
  - Potensrækker, 12
  - Punktvis, 3
  - Rangorden, 10
  - Uniform, 3
  - Uniform og kontinuitet, 9
  - uniform og Weierstrass, 14
- Konvergensradius, 10
  - Kriterier, 12, 16
- Kriterier
  - For konvergensradius, 12, 16
- Kurveintegrale, 3
  - Langs vej, 4
- Kurvesammenhæng, 4
- Kvadratrod
  - og område, 12
- Kvotientkriteriet
  - For konvergensradius, 13, 16
- L'Hospitals regel, 10
- Længde
  - Af vej, 4
- Laplace-operator, 4
- Laurentrække, 4, 10
- Liouvilles sætning, 9
- Logaritme, 10
  - Hovedlogaritme, 3
  - og omløbstal, 10
  - og område, 11
- Logaritmefunktion, 4
  - og argumentfunktion, 4
- Lokal uniform konvergens, 3, 10
- Meromorf funktion, 4
  - Integration, 9
- Middelværdikorollar, 8
- Modulus, 3
- Moreras sætning, 7
- Multiplicitet, 7
- Nulpunkt
  - Isoleret, 10
  - Multiplicitet, 7
  - Orden, 7, 11
  - Simpelt, 7
- Nulpunkter
  - Antal, 11
- Nulpunkter og poler, 11, 16
- Nulpunkter, antal, 11
- Nulpunktsmængde
  - Diskret, 10
- Ombytning af grænseovergange, 11
- Omløbstal, 5
  - Konstant i komponenter, 11
  - og logaritme, 10
  - om 0, 11
  - om  $z$ , 11
- Område, 5
  - Ækvivalenser, 11
  - Enkeltsammenhængende, 5, 11

- Logaritme, 11
  - og bijektion på  $K(0, 1)$ , 12
  - og kurvesammenhæng, 11
  - og kvadratrod, 12
  - og lukket integral, 11
  - og potensfunktion, 12
  - og stamfunktion, 11
- Stjerneformat, 5
- Opskåret plan, 2
- Orden, 7
  - Nulpunkt, 11
  - Pol, 5
- Parametrisering, 3
- Picards sætning, 7
- Pol, 5, 12
  - Orden, 5
  - Simpel, 5
- Polære koordinater, 3
- Poler og nulpunkter, 16
  - Antal, 11
  - og integral, 11
- Polynomium
  - Division, 12
  - Rødder, 12
- Potensfunktion, 5
  - Binomialrække, 12
  - og område, 12
- Potensrække
  - Cauchy-multiplikation, 17
  - Konvergensradius kriterier, 12, 16
- Potensrækker, 12
  - Holomorfi, 12
  - Identitetssætningen, 12
  - Taylorrække, 12
  - Uendeligt differentiable, 12
  - Uniform konvergens, 12
- Principal del, 5, 12
- Punktvis konvergens, 3
- Rødder i polynomier, 12
- Rational funktion, 5, 13
  - Integration, 9
- Realdel, 3
- regneregler
  - Holomorf funktion, 13
- Residuum, 5
  - Beregning, 13, 16
  - og integration, 8
- Riemanns afbildningssætning, 12
- Ringområde, 4
- Rodfunktion, 10
- Rodkriteriet
  - For konvergensradius, 13, 16
- Rouches sætning, 11, 13
- Simpel pol, 5
- Simpelt nulpunkt, 7
- Singularitet, 5
  - Afgørelse af type, 13, 15
  - Essentiel, 5, 13
  - Hævelig, 5, 13
  - Isoleret, 5
- Spejlingsprincippet, 13
- Stamfunktion, 5
  - Ækvivalenser, 14
  - Eksistens, 8, 14
  - Holomorfi, 14
  - og område, 11
- Stjerneformat område, 5
- Taylorrække
  - Holomorf funktion, 14
- Trappelinje, 5
- Trigonometriske funktioner
  - Additionsformler, 14
  - De Moivre, 14
  - Euler, 14
  - Holomorfi, 14
  - Potensrække, 14
- Udvidelse
  - Holomorf, 5
- Uniform konvergens, 3
  - Af række, 3
  - Kompakt, 9
  - Kontinuitetsbevarelse, 9
  - Ombytning af grænseovergange, 11
  - Potensrækker, 12
  - Weierstrass, 14
- Vej, 6
  - Længde, 4
- Weierstrass majorantrækkesætning, 14