

## Besvarelse af 2KF, vinteren 2005

### Opgave 1

1) Da

$$(x + iy)^3 = x^3 + i3x^2y - 3xy^2 - iy^3, \quad \sin(x + iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$$

fås det ønskede.

2) Af 1) ses at

$$f(z) = \sin(z^3) = \sin((x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3))$$

har de ønskede egenskaber.

3) Ved indsættelse af  $z^3$  i potensrækken for  $\sin$  fås

$$f(z) = z^3 - \frac{z^9}{3!} + \frac{z^{15}}{5!} - + \dots$$

### Opgave 2

1) Idet  $\sin z = 1$  netop for  $z = \pi/2 + 2p\pi, p \in \mathbb{Z}$  og idet den afledede af  $1 - \sin z$  er  $-\cos z$ , som er 0 i disse punkter, medens den dobbelte afledede  $\sin z$  ikke er 0, så ser vi at disse punkter er poler af anden orden.

2) Da  $z = \pi/2$  er pol af anden orden for  $f$  har  $(z - \pi/2)^2 f(z)$  en hævelig singularitet for  $z = \pi/2$  og derfor eksisterer den nævnte grænseværdi. Denne kan findes ved brug af l'Hospitals regel, idet man skal differentiere tæller og nævner to gange. Dermed fås

$$\lim_{z \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(z - \frac{\pi}{2})^2}{1 - \sin z} = \lim_{z \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2}{\sin z} = 2.$$

3) Vi har

$$\int_{\partial K(0,4)} \frac{z - \frac{\pi}{2}}{1 - \sin z} dz = \int_{\partial K(0,4)} \frac{(z - \frac{\pi}{2})^2 f(z)}{z - \frac{\pi}{2}} dz = 2\pi i \cdot 2 = 4\pi i,$$

idet vi bruger Cauchys integralsætning på funktionen  $(z - \pi/2)^2 f(z)$ , som er holomorf i cirkelskiven  $K(0, 3\pi/2)$  og har værdien 2 for  $z = \pi/2$ , fundet i spm. 2. Alternativt bruges Cauchys residuesætning på den i  $\mathbb{C}$  meromorfe funktion  $(z - \pi/2)/(1 - \sin z)$ , som har én pol indenfor  $K(0, 4)$  nemlig  $z = \pi/2$ , som er en simpel pol med residuet 2, igen pga udregningen i spm. 2.

### Opgave 3

1) Vi har

$$f(z) = \frac{1}{z(1 - z^2)} = \frac{1}{z}(1 + z^2 + z^4 + \dots) = \frac{1}{z} + z + z^3 + \dots,$$

idet denne udregning gælder når  $0 < |z| < 1$  ifølge formlen for summen af en kvotientrække. Da en Laurent række er entydigt bestemt i et givet ringområde, har vi dermed fundet den.

2) For  $|z| > 1$  har vi

$$f(z) = -\frac{1}{z^3} \frac{1}{1 - \frac{1}{z^2}} = -\frac{1}{z^3} \left(1 + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^4} + \dots\right) = -\frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^5} - \dots,$$

idet vi denne gang udnytter en kvotientrække med kvotient  $1/z^2$ , som er numerisk mindre end 1 når  $|z| > 1$ . På grund af entydighed har vi fundet Laurent rækken i det givne ringområde.

3) Integranden i det givne kurveintegral er  $f(z)z$  og derfor er integralets værdi lig med koefficienten  $c_2$  i den relevante Laurent række. For  $0 < r < 1$  er det den første række og for  $r > 1$  den anden, men i begge tilfælde er  $c_2 = 0$ .

Spørgsmålet kan også besvares uden brug af Laurent rækker: I det første tilfælde er integranden holomorf og Cauchys integralsætning giver værdien 0. I det andet tilfælde har vi to simple poler indenfor  $K(0, r)$  med residuer  $\pm 1/2$ , og ved residuesætningen får vi så også 0.

#### Opgave 4

1)  $x^3 = i = \exp(i\pi/2)$  har løsningerne

$$x = e^{i\frac{\pi}{6}}, x = e^{i\frac{5\pi}{6}}, x = -i,$$

så den rationale funktion under integraltegnet har to simple poler i øvre halvplan og en simpel pol i nedre. Vi kan bruge Sætning 7.8 og med fordel bemærkning 7.9, som giver

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^3 - i} dx = -2\pi i \operatorname{Res}(f, -i).$$

Residuet beregnes fra brøken  $x/(3x^2)$  ved indsættelse af  $x = -i$  som giver værdien  $i/3$ . Ganges dette med  $-2\pi i$  fås den angivne værdi.

2) Vi forlænger integranden med  $x^3 + i$  og finder så

$$\frac{2\pi}{3} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(x^3 + i)}{x^6 + 1} dx.$$

Altså har imaginærdelen af integranden integralet 0 og for realdelen har vi

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^4}{x^6 + 1} dx = \frac{2\pi}{3},$$

og dermed finder vi det ønskede integral som halvdelen altså  $\pi/3$ .