

**Matematik 2KF**

Velkommen til denne tre timers eksamen. Det er tilladt at skrive med blyant og benytte viskelæder, så længe skriften er læselig og udviskninger foretages grundigt. Overstregning trækker ikke ned og anbefales ved større ændringer.

Ved eksamen er alle skriftlige hjælpemidler (bøger, notater, formelsamlinger o. lign.) tilladt. Lommeregner og andet elektronisk udstyr må ikke anvendes.

Eksamenssættet består af 4 opgaver og er på 2 sider. Et fuldstændigt besvaret eksamenssæt tildes 100 point. De enkelte opgavers pointfordeling fremgår nedenfor.

**Opgave 1 (25 points)**

1) Vis følgende formler, hvor  $z = x + iy \in \mathbb{C}$ :

$$\operatorname{Re}(z^3) = x^3 - 3xy^2; \quad \operatorname{Im}(z^3) = 3x^2y - y^3; \quad \operatorname{Re}(\sin z) = \sin x \cosh y.$$

2) Bestem den hele holomorfe funktion  $f$ , der har egenskaberne  $f(0) = 0$  og

$$\operatorname{Re}(f(z)) = \sin(x^3 - 3xy^2) \cosh(3x^2y - y^3) \text{ for } z = x + iy \in \mathbb{C}.$$

3) Find potensrækken (med centrum 0) for  $f$ .

**Opgave 2 (25 points)**

Udtrykket

$$f(z) = \frac{1}{1 - \sin z}$$

definerer en meromorf funktion i  $\mathbb{C}$ .

1) Find polerne for  $f$  og deres orden.

2) Vis at  $(z - \frac{\pi}{2})^2 f(z)$  har en hævelig singularitet for  $z = \frac{\pi}{2}$  og bestem grænseværdien

$$\lim_{z \rightarrow \frac{\pi}{2}} (z - \frac{\pi}{2})^2 f(z).$$

3) Udregn kurveintegralet

$$\int_{\partial K(0,4)} \frac{z - \frac{\pi}{2}}{1 - \sin z} dz,$$

idet der integreres én gang rundt langs cirklen i positiv omløbsretning.

**Opgave 3** (25 points)

Funktionen

$$f(z) = \frac{1}{z - z^3}$$

er holomorf i  $\mathbb{C} \setminus \{0, \pm 1\}$ .

- 1) Find Laurentrækken for  $f$  i ringområdet  $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < 1\}$ .
- 2) Vis at Laurentrækken for  $f$  i ringområdet  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}$  er

$$f(z) = -\frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^5} - \dots$$

- 3) Udregn kurveintegralet

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K(0,r)} \frac{dz}{1 - z^2},$$

for  $0 < r < 1$  og for  $1 < r$ , idet der integreres én gang rundt langs cirklen i positiv omløbsretning.

**Opgave 4** (25 points)

- 1) Vis at integralet

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^3 - i} dx$$

har værdien  $\frac{2\pi}{3}$ . Der lægges vægt på at de enkelte skridt i udregningen træder klart frem.

- 2) Find værdien af integralet

$$\int_0^{\infty} \frac{x^4}{x^6 + 1} dx.$$