Uendelighedsbegrebet – et supplement

af

Flemming Topsøe
Matematisk Institut, Københavns Universitet

Forord[1]

Et supplement! Hvorfor det? Ganske enkelt, fordi Lars Mejlbo i samarbejde med Matematiklærerforeningen allerede har udgivet to hæfter, der egner sig udmærket til formålet: at bidrage til 3g'ernes arbejde med et valgfrit emne i matematik, nærmere betegnet om uendelighedsbegrebet.

Der er flere muligheder for at tilrettelætte et arbejde omkring uendelighedsbegrebet. Jeg tror, jeg ville vælge at hæfte mig ved fire punkter:

- inspiration ved opridsning af baggrunden og den historiske udvikling
- Hilberts hotel
- Cantors sætning (diagonalbeviset)
- Bernsteins ækvivalenssætning

I Lars Mejlbo's hæfter findes materiale nok om de tre første punkter og vedrørende det sidste, er sætningen formuleret, og desuden er så tilpas mange anvendelser af sætningen anført, at læseren kan indse, at det er en helt nødvendig og meget nyttig sætning. Men sætningen er ikke bevist. Det er synd! Sætningen er nemlig

[1]forordet – og teksten iøvrigt – bærer præg af at manuskriptet var tænkt som et bidrag til en samling "appetitvækkere", som Matematiklærerforeningen i øjeblikket arbejder på, se [MLF]. Manuskriptet blev imidlertid for langt, og indgår nu som baggrundsmateriale til en ganske kort "appetitvækker". I omarbejdet form vil manuskriptet muligvis blive udnyttet i et tilsvarende norsk projekt. Materialet vil desuden finde anvendelse i kurset Matematik X i foråret 1993 (hvor det vil blive suppleret med mere teknisk stof om matematikkens grundlag). Endelig vil manuskriptet blive anvendt i forbindelse med Åbent Hus arrangementet 26. november 1992 på Københavns Universitet, H. C. Ørsted Institutet. Manuskriptet udsendes hermed i en uformel publikationsserie fra Københavns Universitet. Tilføjelse (marts 1999): Materialet indgår nu i kurset Matematik Y: "Introduktion til abstrakt matematik", Matematisk Afdeling 1998 (ISBN 87-7834-261-9).

ganske let at vise – hvis man blot angriber problemet på "den rigtige" måde. Det er denne påstand, der har fået mig til at fare i blækhuset. Tænk, hvis man kunne overbevise Kongerigets generationer af 3g'ere om at det hele er ganske enkelt – så let, at man umuligt kan glemme det, først man én gang har set lyset ! Så kunne et arbejde med uendelighedsbegrebet komme til at stå helt afsluttet, hvor alt er afklaret – på nær det chok, eleverne bydes, når de til sidst hos Lars Mejlbo læser, at man iøvrigt slet ikke ved, hvad en mængde er ! (Måske nogle lærere kan følge dette op ved at fortælle lidt mere om Gödel, Cohen ...).

Nu jeg er gået igang med at skrive, vil jeg gå lidt videre end blot at give beviset for Bernstein's sætning (faktisk giver jeg to beviser for denne sætning). De to første emner – det historiske og Hilberts hotel – skal jeg ikke sige mere om, udover at jeg, inspireret af Radiserne, foretrækker at begynde fortællinger om Hilberts hotel med "En mørk og stormfuld nat –".

Cantors sætning har jeg tilladt mig at skrive lidt mere om. Og så har jeg gjort en del ud af at skabe en bedre indlevelse ved overvejelser om, hvilken af to mængder, der er "størst", ved at indføre, hvad jeg vil kalde *Cantors balsal.* Det er et pædagogisk trick, der for mange, det tror jeg, jeg kan sige, letter tilegnelsen af begreberne ganske betydeligt. Jeg har ikke selv æren af at have fundet herpå – den må (vist nok) tilskrives professor Børge Jessen (iøvrigt æresmedlem af Matematiklærerforeningen).[2]

Jeg håber ikke, mine betragtninger vil virke som goldt "besser-macherei". Mit hovedmål er Bernstein's ækvivalenssætning og i den forbindelse håber jeg, at alle, der giver sig i kast hermed, vil nå det laveste, og enkelte det højeste af de mål, jeg hermed opstiller for udbyttet ved læsningen:

Niveau 1. Jo, jeg kunne godt følge beviset skridt for skridt.

Niveau 2. Jeg forstod endog idéen.

Niveau 3. Hvor smukt, havde jeg bare lært at tænke på den måde, kunne jeg selv have fundet på det ! Er matematik så let, så smukt ?

De, der når niveau 3, er matematikere, de der når niveau 2 kan blive det ! Er det ikke muligt at nå niveau 1 på basis af det følgende, har jeg forfejlet mit mål. Med opbydelsen af en smule selverkendelse, må jeg indrømme, at det nok er nødvendigt for eleven i 3g at søge vejledning hos sin lærer. Ellers kan det blive svært at leve op til målsætningen.

[2]Tilføjelse (marts 1999). Børge Jessen døde i 1993. Balsalen hedder nu *Jessens balsal* (da forbeholdet "vist nok" kan fjernes). Betegnelsen er ændret i denne udgave af supplementet. Navngivningen kan opfattes som en anerkendelse af Børge Jessens engagement i undervisningen. Jeg har været i tvivl om jeg skulle beholde Cantor som dansemester, eller lade Jessen optræde i denne rolle. Jeg valgte det første. Det svarer vist bedst til Jessens beskedenhed og beundring for Cantor (kun overgået af Jessens beundring for Hilbert).

Som så ofte når man begynder at skrive, dukker flere muligheder, idéer op. Der er ikke blevet plads til alt i dette "supplement". Jeg håber at få energi og tid til at genoptage tråden inden for længe.

FT, Tryggerød Mose, efteråret 1992.

1. Jessens balsal.

Lad det være sagt med det samme, det er en *stor* balsal. Ganske ligesom Hilberts hotel er et *stort* hotel. Måske hører balsalen ligefrem til Hilberts hotel og udgør dette hotels grandiose festsal. [3]

Balsalen indeholder to lange – meget lange – stolerækker. På den ene er det meningen, at drengene skal sidde; den anden – lige over for – er beregnet til pigerne. Cantor er dansemester.

Hvad kan vi bruge balsalen til ? Jo, lad X og Y være mængder. X er mængden af "drenge", Y mængden af "piger". Skal vi nu undersøge om der er flest drenge eller piger, eller eventuelt lige mange drenge og piger, kan vi føre de forventningsfulde x'er og y'er ind i Jessens balsal og bede dem tage plads på de dertil indrettede stolerækker. Beder vi drengene byde pigerne op til dans, og lykkes det for alle drengene at komme ud at danse, må det være udtryk for, at der er nok af piger at tage, altså, at der er flere eller i hvert fald mindst lige så mange piger som drenge.

Når drengene byder pigerne op til dans, og lad os tænke os, at det lykkes for alle drenge at komme ud at danse, er der tale om at hver dreng udvælger en pige, *inklinerer* for hende med et fremmedord, som jeg vil bruge (og som de fleste vist kender ?). Da ingen pige må danse med mere end én dreng – nej, sådan noget vil vi virkelig ikke have – opfylder afbildningen *dreng* $\curvearrowright$ *udvalgt pige* den betingelse, vi kender så godt (?) fra definitionen af en injektiv afbildning. Selvom alle drengene, sådan som vi forestiller os, danser lysteligt, kan der udmærket være nogen blandt pigerne, der ikke tager del i morskaben. Med andre ord, der kan være bænkevarmere. Men er vi heldige, er der ingen bænkevarmere, enhver pige er budt op til dans. Betingelsen for at dette finder sted, genkender vi også: Det er jo, at afbildningen *dreng* $\curvearrowright$ *udvalgt pige* er surjektiv. For at præcisere:

Definition. Lad X (drengemængden) og Y (pigemængden) være mængder. Ved en drenge-inklination forstås en injektiv afbildning $X \to Y$. Ved en fuldstændig drenge-inklination forstås en bijektiv afbildning $X \to Y$. Tilsvarende defineres en pige-inklination som en injektiv afbildning $Y \to X$ og en fuldstændig pige-inklination som en bijektiv afbildning $Y \to X$.

For at sikre at vi er helt enige om terminologien, skal det understreges, at når der tales om en afbildning $X \to Y$, er det underforstået, at afbildningen har hele X som definitionsmængde. I situationer, hvor det af sammenhængen fremgår, om vi betragter en drenge- eller en pige-inklination, tales ofte bare om en inklination.

Definitionen er intet andet end en anden og mere malende, suggestiv måde end den sædvanlige at udtrykke på, at en afbildning er henholdsvis injektiv eller

[3] efter læsningen vil læseren dog nok indvende, at selv Hilberts hotel er alt, alt for lille til at huse Jessens balsal.

bijektiv. Jeg tror, jeg tør kalde det en kendsgerning, at mange gymnasieelever ikke har rigtig fat på disse begreber. Måske kan ovenstående (poppede?) definition hjælpe til at klare begreberne. Det var hensigten. Hvis du, min læser, slet ikke kan lide forestillingen om drenge, piger og dans, ja, så vil du næppe komme til at bryde dig om det følgende. Måske er du formalist og foretrækker en rent teknisk matematisk referenceramme. [4]

Vi vender tilbage til spørgsmålet om, hvilken af mængderne X og Y, der indeholder "flest" elementer og udmønter vore betragtninger fra før i endnu en definition:

Definition. Vi siger, at *mægtigheden, kardinaliteten* eller *kardinaltallet* af (drenge-) mængden X er mindre end eller lig med mægtigheden (kardinaliteten, kardinaltallet) af (pige-) mængden Y, og skriver

$$|X| \leq |Y|,$$

såfremt der findes en inklination $X \to Y$.

Vi siger, at *mægtigheden (kardinaliteten, kardinaltallet)* af de to mængder er den samme, og kalder mængderne ækvipotente, og skriver

$$|X| = |Y|,$$

såfremt der findes en fuldstændig inklination $X \to Y$.

Sprogbrugen følger her Lars Mejlbo[5].

Kort skrevet kan de to definitioner udtrykkes således

$$\begin{aligned}
|X| \leq |Y| &\Leftrightarrow \exists \text{ drenge-inklination } X \to Y \\
&\Leftrightarrow \exists f : X \to Y \text{ injektiv} \\
|X| = |Y| &\Leftrightarrow \exists \text{ fuldstændig drenge-inklination } X \to Y \\
&\Leftrightarrow \exists f : X \to Y \text{ bijektiv} .
\end{aligned}$$

[4] Her er, til formalisten, de kolde matematiske definitioner. Lad X og Y være mængder. *Produktmængden* $X \times Y$ er mængden af ordnede par (x, y) med $x \in X$ og $y \in Y$. En *afbildning fra X til Y* er en mængde $f \subseteq X \times Y$ så at implikationen $(x, y) \in f$, $(x, y') \in f \Rightarrow y = y'$ gælder. Hvis $(x, y) \in f$, skrives hyppigt $y = f(x)$, evt. $x \curvearrowright y$. *Definitionsmængden* er mængden $Dm(f) = \{\, x \mid \exists y : y = f(x) \,\}$ og *værdimængden* er mængden $Vm(f) = \{\, y \mid \exists x : y = f(x) \,\}$. Afbildningen er en *afbildning af X ind i Y*, og vi skriver $f : X \to Y$, hvis $Dm(f) = X$. Afbildningen er *injektiv* hvis implikationen $(x, y) \in f$, $(x', y) \in f \Rightarrow x = x'$ gælder, *surjektiv* hvis $Vm(f) = Y$ og *bijektiv*, hvis den både er injektiv og surjektiv. Er afbildningen f fra X til Y injektiv, defineres den *inverse afbildning*, f^{-1}, som afbildningen fra Y til X defineret ved $(y, x) \in f^{-1} \Leftrightarrow (x, y) \in f$. For at fuldende definitionerne af grundlæggende begreber, anføres, at for afbildninger $f : X \to Y$ og $g : Y \to Z$ defineres den *sammensatte afbildning* $g \circ f : X \to Z$ ved $(x, z) \in g \circ f \Leftrightarrow \exists y : (x, y) \in f, (y, z) \in g$.

[5] Sprogbrugen er standard, notationen ligeså, omend card(X) også bruges af mange forfattere. I [LM1+2] bruges notationen $\overline{\overline{X}}$

Endnu en definition har vi brug for:

Definition. Vi siger, at mægtigheden (kardinaliteten, kardinaltallet) af X er strengt mindre end mægtigheden (kardinaliteten, kardinaltallet) af Y, og vi skriver

$$|X| < |Y| \ .$$

såfremt $|X| \leq |Y|$ og non$(|X| = |Y|)$ gælder.

For at understøtte intuitionen, vil vi fra tid til anden bruge endnu nogle udtryk hentet fra dagligdagen. Lad $f : X \to Y$ være en inklination. Når x inklinerer for y, altså, når $y = f(x)$, omtaler vi også y som den *udkårne* og x som *tilbederen* eller *beundreren.* Om de varme følelser, der her tænkes at herske, er gængældt, er ikke godt at vide. Hvis pigerne en aften byder drengene op til dans, lad os sige ved inklinationen $g : Y \to X$, er det jo ikke givet – som mange vil vide af bitter erfaring – at pigen y fra før netop foretrækker drengen x altså, at $x = g(y)$. Også når pigerne byder op til dans, bruger vi betegnelserne "udkåren" og "tilbeder".

Når a inklinerer for b (a er tilbederen, b den udkårne), og vi ikke har behov for at minde om, hvilken speciel inklination, vi har i tankerne, skriver vi

$$a \vdash b \ .$$

Notationen kan altså bruges både i tilfældet $x \vdash y$, med $y = f(x)$, og i tilfældet $y \vdash x$, med $x = g(y)$.

Lad os nu hæfte os ved situationen, hvor $|X| = |Y|$ (det havde vi nok også i tankerne ovenfor). Kravet hertil er, at der findes en fuldstændig inklination $f : X \to Y$. Kun tilsyneladende behandler denne betingelse X og Y forskelligt (kravet er jo ækvivalent med at der findes en fuldstændig inklination $g : Y \to X$). For at bringe symmetrien bedre til udtryk, kan vi tale om en *fuldstændig sammenparring* af drengene og pigerne, når der foreligger en fuldstændig inklination (hvadenten dette refererer til et $f : X \to Y$ eller et $g : Y \to X$).

Af og til er det dog nyttigt netop at behandle drenge og piger forskelligt. Det kender vi jo så godt ... Hvis nogen taler om Anna Bertelsen, spørger vi måske først "hvem er det, hvem er hun gift med?" og reagerer på svaret med et "åhh, det er bankdirektørens, hvor interessant !". Anna Bertelsen er ikke længere Anna, nej, hun er bankdirektørens kone. Vi har "omkodet hende", brugt bankdirektøren til at identifisere hende, fortælle, hvem hun er. Omend denne praksis er lidet påskønnelsesværdig, er den til tider nyttig i matematikken. Er $f : X \to Y$ en fuldstændig inklination, siger vi, at den giver en *kodning* af pigerne, eller at pigerne er *kodet* ved drengene. Hvis f.eks. Anna (bankdirektørens kone, I ved !), Bergthora, Christina, Anders, Bergfinnur og Christian frekventerer Cantor's balsal og Anders inklinerer for Anna, Bergfinnur for Bergthora og Christian for Christina, så giver det en kodning af pigerne, som vi så ikke længere tænker på som de tre søde piger

Anna, Bergthora og Christina, hvorom meget kan siges, men som henholdsvis Anders' pige, Bergfinnur's pige og Christians pige: $\text{pige}_{\text{anders}}, \text{pige}_{\text{bergfinnur}}$ og $\text{pige}_{\text{christian}}$.

Øvelse 1. Indse, at $|X| < |Y|$ kommer ud på, at der findes en inklination $X \to Y$ – så alle drengene kan altså komme ud at danse – men ligegyldigt, hvordan drengene byder pigerne op til dans (altså ligegyldigt, hvilken inklination de anvender), vil der være bænkeværmere blandt pigerne (mindst én).

Øvelse 2. Antag, at $|X| < |Y|$ og at X er uendelig. Bevis, at for enhver inklination $X \to Y$, må der være uendeligt mange bænkevarmere blandt pigerne!

Vejledning: Udnyt [LM1], Sætning 2 (som sikrer, at der findes en numerabelt uendelig delmængde af X) og tænk som receptionisten på Hilberts hotel!

Øvelse 3. Antag igen, at $|X| < |Y|$ og at X er uendelig. Bevis følgende skærpelse af resultatet i Øvelse 2: For enhver inklination $X \to Y$, vil $|B| > |\mathbb{N}|$, hvor B er mængden af bænkevarmere.

Vejledning: Igen, receptionisten på Hilberts hotel kan klare denne opgave.

Bemærkning. Der gælder et endnu stærkere resultat – og et, selv receptionisten på Hilberts hotel har svært ved at fatte, se Øvelse 20.

2. Variationer over et tema af Cantor.

Udgangspunktet er Cantors sætning. Den har vi jo set i Lars Mejlbo's hæfter. I al sin enkelhed siger den, at $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$. I dansesproget siger den, at ligegyldigt, hvordan de "naturlige drenge" byder de "reelle piger" op til dans, vil der altid være bænkevarmere blandt pigerne. Det snedige og uhyre simple ræsonnement, diagonalræsonnementet, vil vi give en udformning, så det direkte kan anvendes på enhver mængde X. Herved vil vi vise følgende resultat (omtalt i [LM1], Kapitel 7):

Sætning 1. *For enhver mængde X findes en mængde Y med større kardinalitet:* $|X| < |Y|$.

Denne sætning er selvfølgelig banal for endelige mængder. For uendelige mængder kan vi ved gentagen anvendelse af sætningen konstruere flere og flere uendelige mængder, f. eksempel kan vi vise:

Sætning 2. *Der findes en følge af uendelige mængder $X_1, X_2, \cdots$ således, at*

$$|X_1| < |X_2| < |X_3| < \cdots ,$$

altså $|X_n| < |X_{n+1}|$ for alle $n \in \mathbb{N}$.

ØVELSE 4. Indse det!

Vejledning: Det er ganske let! Start med $X_1 = \mathbb{N}$, f. eks., og anvend Sætning 1 (som ganske vist endnu ikke er vist).

Om Sætning 2: Det er ligegodt uhyggeligt! Der må altså ikke bare være mere end én slags "uendelighed" (det vidste vi fra resultatet $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$), men uendelig mange slags uendeligheder! Og situationen er langt mere kompliceret end antydet i Sætning 2. Det vender vi tilbage til i §4 (se Øvelse 21).

Vi vender os mod beviset for Sætning 1. Læseren er advaret, sætningen har nogle konsekvenser, der let kan få det til at svimle for os. Så læseren må være på vagt. Kan det virkelig være rigtigt? Men beviset er uafviseligt simpelt – selv den mest pedantiske læser må bøje sig. Se blot! Først en definition, som egentlig bare er en introduktion af en bekvem notation, standard i almindelig mængdelære:

Definition. Lad X være en mængde. Med 2^X betegnes mængden af afbildninger af X ind i mængden, der indeholder de to elementer 0 og 1:

$$2^X = \{ f \mid f : X \to \{0, 1\}\} .$$

Vi kan nu vise Sætning 1 i følgende konkrete udgave

Sætning 3. *For alle mængder X gælder*

$$|X| < |2^X| .$$

Bevis. (Cantors diagonalmetode, strømlinet udgave) Vi fører elementerne i X ind som drenge og elementerne i 2^X ind som piger i Jessens balsal. Det er let at se, at alle drengene kan komme ud at danse. Vi skal bare lade drengen $x_0 \in X$ byde pigen $f_0 \in 2^X$ op, hvor

$$f_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } \ x = x_0 \\ 0 & \text{for } \ x \neq x_0 \ . \end{cases}$$

Overvej!

Dermed har vi vist, at $|X| \leq |2^X|$.

For at vise, at $|X| < |2^X|$, lader vi $f : X \to 2^X$ betegne en vilkårlig inklination. I stedet for den sædvanlige betegnelse $f(x)$ for billedet af x under afbildningen f, bruger vi betegnelsen f_x. For ethvert $x \in X$, er f_x altså en afbildning af X ind i $\{ 0, 1 \}$. Og som sådan har f_x for ethvert element $x' \in X$ en funktionsværdi $f_x(x')$, som altså enten er 0 eller 1.

Se nu på pigen ("diagonalpigen") $\delta \in 2^X$ defineret ved forskriften

$$\delta(x) = 1 - f_x(x) \ ; \ x \in X \ . \tag{1}$$

At vi ved (1) virkelig har defineret en pige (et element i 2^X), er klart. Overvej! Men det er også klart, at hun er bænkeværmer. For lad x_0 betegne en af drengene (et element i X). Så danser x_0 med pigen f_{x_0}, og det er i hvert fald ikke pigen δ, thi

$$\delta(x_0) = 1 - f_{x_0}(x_0) \neq f_{x_0}(x_0) \ .$$

Dette ræsonnement kan, som sagt, anvendes for enhver dreng $x_0 \in X$. Ergo må pigen δ være bænkevarmer (ved inklinationen f).

Inklinationen f var vilkårlig. Så ved enhver inklination findes en bænkevarmer!

ØVELSE 5. Det væsentlige i beviset er, at *ingen* afbildning (injektiv eller ej) $x \curvearrowright f_x$ af X ind i $Y = 2^X$ er surjektiv. Dette i sig selv sikrer, at $|X| < |Y|$. Bevis dette!

Vejledning: Vi må bede læseren udnytte et resultat fra mængdelæren uden bevis, nemlig at for alle mængder A og B gælder et af udsagnene $|A| < |B|$, $|A| = |B|$ eller $|A| > |B|$ (se [LM1], Sætning 5). Dette resultat, som lyder så plausibelt, er dybtliggende og bygger på et spidsfindigt aksiom (udvalgsaksiomet) fra aksiomatisk mængdelære.

ØVELSE 6.[6] For hver af mængderne $X = \{0\}$, $\{0,1\}$ og $\{0,1,2\}$ skal man bestemme 2^X og angive $|2^X|$ (husk: for endelige mængder skrives $|Y| = n$ såfremt Y er ækvipotent med en mængde med n elementer).

Det er muligt, at den, der nøjere har tænkt over Øvelse 6 vil have fået øje på at 2^X har "noget med" mængden af delmængder af X at gøre. Har man først fået øje på det, er det ikke svært at formalisere:

Definition. Lad X være en mængde, og A en delmængde af X. Ved indikatorfunktionen for A, der betegnes 1_A, forstås funktionen $1_A : X \to \{0,1\}$ givet ved

$$1_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } x \in A \\ 0 & \text{for } x \in X \setminus A\,. \end{cases}$$

Sætning 4. *Lad X være en mængde. Da er afbildningen*

$$A \curvearrowright 1_A$$

en bijektion af mængden af delmængder af X på mængden 2^X.

ØVELSE 7. Bevis dette!

Hvilken delmængde svarer til konstantfunktionen 0 ved bijektionen i sætningen? – Og til konstantfunktionen 1?

ØVELSE 8. Udnyt sætningerne 3 og 4 til at vise, at enhver mængde indeholder flere delmængder end elementer. Præcisér først påstanden. Gælder påstanden også for den tomme mængde?

ØVELSE 9. Konstruér en konkret følge af uendelige mængder, der opfylder betingelserne i Sætning 2.

Vejledning: Se Øvelse 4. Konstruktionen bør kunne udføres "naivt" af alle (f. eks. ved anvendelse af udtryk som "o.s.v."). De, der kender til induktion og, bedre, rekursion [7] kan formalisere konstruktionen, hvis de finder det spændende.

[6] En bemærkning til den formalistisk indstillede læser: Øvelsen ser på Sætning 3 for endelige mængder bestående af henholdsvis 1, 2 og 3 elementer. Man kan også se på sætningen for en mængde med 0 elementer, altså for den tomme mængde. En formalist, der nøje følger definitionerne på afbildninger m.v. givet i en tidligere fodnote, vil se, at sætningen også gælder i dette tilfælde, idet $2^{\emptyset} = \{\emptyset\}$, en mængde med ét element. Andre vil foretrække at sige, at den tomme mængde interesserer os ikke i Sætning 3.

[7] Lad os kort minde om principperne for induktion og rekursion (over $\mathbb{N}$). Lad $p(n)$ være et udsagn, parametriseret ved $n \in \mathbb{N}$ (f.eks. kunne det være udsagnet $\forall x \in \mathbb{R} : \sum_1^n \sin(kx) = \sin(\frac{n}{2}x) \cdot \sin(\frac{n+1}{2}x) / \sin(\frac{x}{2})$ eller udsagnet $\forall f : \{1, \cdots, n\} \to \{1, \cdots, n\} : f$ injektiv $\Rightarrow f$ surjektiv). *Induktionsprincippet* siger, at såfremt $p(1)$ er sand og såfremt implikationen "$p(n)$ sand $\Rightarrow p(n+1)$ sand" gælder for alle $n \in \mathbb{N}$, så er $p(n)$ sand for alle $n \in \mathbb{N}$. For *rekur-*

Øvelse 10. Bevis, at der findes en injektiv afbildning $F : 2^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$, og slut heraf, at $\mathbb{R}$ indeholder en delmængde, som er ækvipotent med $2^{\mathbb{N}}$. (Se videre i Øvelse 24).

Vejledning: F. eks. kunne vi til $f \in 2^{\mathbb{N}}$ lade svare

$$F(f) = \sum_1^\infty f(n) \cdot 10^{-n}$$

(tænk på det som decimaltal).

Øvelse 11. Udnyt resultatet i Øvelse 10 og Sætning 3 til at vise Cantor's sætning

$$|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|.$$

Sammenlignes med det bevis for Cantor's sætning, der er lagt op til i sidste øvelse med det i [LM1] og [LM2] givne, vil man se, at det egentlig er samme bevisidé, der ligger bag, ja, det er faktisk "samme" bevis. Vores betragtningsmåde er altså en variation over et tema af Cantor.

---

sionsprincippet (eller princippet for konstruktion ved induktion) er der (i vores udgave) givet en mængde Y, et element $y_1 \in Y$ og en afbildning, der til hvert $n \in \mathbb{N}$ og enhver afbildning $f : \{1, \cdots, n\} \to Y$ lader svare et element $\Phi(n, f) \in Y$. Ifølge rekursionsprincippet findes da en entydigt bestemt afbildning $F : \mathbb{N} \to Y$ således, at $F(1) = y_1$ og så at det for hvert $n \in \mathbb{N}$ gælder, at $F(n+1) = \Phi(F|n)$, hvor $F|n$ betegner F's restriktion til $\{1, 2, \cdots, n\}$. For dette princip er det ikke vigtigt at vi på forhånd har givet en mængde Y. Det er nok at have givet et y_1 og en afbildning, der til hvert n, f med $n \in \mathbb{N}$ og f en afbildning af $\{1, 2, \cdots, n\}$ knytter en eller anden mængde $\Phi(n, f)$.

3. Bernstein's ækvivalenssætning.

Matematikken er fuld af sætninger eller, højtideligere, teoremer, der alle er irriterende – eller fascinerende, alt efter smag – ved at kræve et stringent, uimodsigeligt bevis. Nogle sætninger er lette at formulere, andre komplicerede, nogle er "oplagte", andre overraskende eller endog direkte i modstrid med vores intuition. Og "oplagte" sætninger kan have lange, besværlige beviser, mens lange sætninger med komplicerede formuleringer meget vel kan have ganske korte beviser. Læseren kan more sig med at finde eksempler frem på disse fænomener – fra Lars Mejlbo's noter og dette supplement eller fra bekendtskabet med anden matematik.

Den sætning, vi ser på, udmærker sig ved at være så intuitivt oplagt, at den første vanskelighed er at indse, at der overhovedet er noget at bevise. Det drejer sig om følgende resultat (se også Sætning 4 i [LM1]):

Sætning 5 (Bernstein's ækvivalenssætning) *Hvis to mængder X og Y opfylder de to betingelser*

$$|X| \leq |Y| \quad \textit{og} \quad |Y| \leq |X| ,$$

så er mængderne ækvipotente, altså

$$|X| = |Y| .$$

Hvis vi havde skrevet "det er klart at ..." i stedet – og læseren ikke var advaret – så havde de fleste nok accepteret påstanden uden videre. Lad os først prøve at finde ud af, hvor problemet ligger.

Vi bruger vores dansesymbolik. Det hele foregår i Jessens balsal. Betingelsen $|X| \leq |Y|$ betyder, at alle drengene (x'erne) kan komme ud at danse, når de byder pigerne (y'erne) op til dans. Der findes altså en drenge-inklination $f : X \to Y$. Og tilsvarende siger betingelsen $|Y| \leq |X|$, at alle pigerne kan komme ud at danse, når de byder drengene op til dans, der findes altså en pige-inklination $g : Y \to X$.

Problemet er, at der kan være bænkevarmere blandt pigerne ved drenge-inklinationen, således, at denne ikke er fuldstændig, og at der også kan være bænkevarmere blandt drengene ved pige-inklinationen, således, at heller ikke denne er fuldstændig.

Problemet opstår altså, når såvel f som g giver bænkevarmere. Kan det tænkes? Ja det kan det da. Med den baggrund læseren forudsættes at have fra diskussionen af Hilberts Hotel, er dette klart – og vi skal også snart se eksempler herpå. Men problemet opstår ikke for endelige mængder:

Øvelse 12. Bevis det! Mere præcist skal man bevise, at såfremt X og Y er endelige mængder (det er nok at antage, at en af mængderne er endelig) og der findes $f : X \to Y$ injektiv og $g : Y \to X$ injektiv, så er såvel f som

g surjektive (ingen bænkevarmere!) og X og Y indeholder altså samme antal elementer: $|X| = |Y|$.

Bemærkning. Vi anfører faktisk senere et bevis herfor. Men læseren bør selv kunne finde et bevis – og så kan det være interessant at sammenligne med det, vi foreslår senere (Øvelse 18).

Hvordan kan vi leve os mere ind i problemstillingen? Tit, når man skal vise en generel sætning, er det en god idé at undersøge nogle simple specialtilfælde, nogle eksempler. Ligeledes her. Vi vil se på ét enkelt eksempel og må vælge ét med uendelige mængder X og Y – ellers er der intet problem. Da sætningen *er* sand, er vi nødt til at vælge et eksempel med X og Y ækvipotente mængder. Så kan vi lige så godt vælge et eksempel med X og Y eksemplarer af *samme* uendelige mængde. Og hvorfor ikke vælge den simpleste uendelige mængde, vi kender, nemlig $\mathbb{N}$?

Det bør ikke forvirre, at vi vælger et eksempel med eksemplarer af samme mængde og skriver $X = Y$, hvor vi tænker på X og Y som disjunkte (X indeholder jo kun drenge, Y kun piger). Formalisten står sig måske ved at sikre sig, at X og Y er forskellige. Når vi f.eks. skriver "lad $X = Y = \mathbb{N}$", kan formalisten lade $X = \{(n,0)|n \in \mathbb{N}\}$ og $Y = \{(n,1)|n \in \mathbb{N}\}$, d.v.s. et ekstra mærke "0" indføres for at vise, det er en dreng, og et "1" viser, det er en pige. Vi vil dog ikke være så formelle i det følgende.

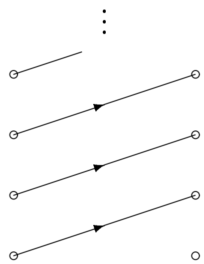
Hvordan kan vi lære noget af et så simpelt eksempel, hvor $X = Y = \mathbb{N}$? Her er det jo oplagt, at $|X| = |Y|$ – vi behøver blot betragte den identiske afbildning $X \to Y$ for at se dette. Men pointen er, at vi skal vise $|X| = |Y|$ udelukkende på basis af det, der er givet, nemlig inklinationerne $f : X \to Y$ og $g : Y \to X$. Vores eksempel er ikke helt fastlagt, idet vi endnu intet har sagt om f og g. Det vil vi gøre nu. Lad os tænke os, at den "naturlige" dreng $n \in X$ tilhører det "n'te sociale lag". Jo højere socialt lag, jo bedre. Den naturlige dreng 1 tilhører altså det laveste sociale lag. Tilsvarende forestilling gør vi også gældende for pigerne. Det virker så rimeligt, at når den naturlige dreng n byder en pige op til dans, vælger han én, der tilhører et højere socialt lag, men kun lige ét lag højere. Med andre ord, vi ser på inklinationen $f : X \to Y$ givet ved

$$f(n) = n + 1\ ;\ n \in X \quad (= \mathbb{N})\ .$$

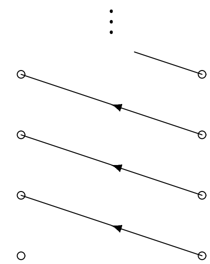
Ved inklinationen f vil pigen $1 \in Y$ være bænkevarmer. Ganske tilsvarende, tænker vi os, at pigerne, når de skal byde op til dans, gør dette efter inklinationen $g : Y \to X$ givet ved

$$g(n) = n + 1\ ;\ n \in Y \quad (= \mathbb{N})\ .$$

Når pigerne byder op til dans, er drengen $1 \in X$ bænkevarmer.



drenge-inklinationen f



pige-inklinationen g

Fig. 1

Vi har nu et helt konkret eksempel at tænke på. Alle indgående størrelser X, Y, f og g er fastlagt. Ud fra *dem* (og ikke ud fra anden "inside" viden om at X og Y klart er ækvipotente) skal vi vise, at *alle* kan komme ud at danse. Det er nærliggende at søge en løsning, så hver enkelt *enten* kommer til at danse med sin udkårne *eller* med sin tilbeder (hvis vedkommende da har en tilbeder, altså ikke er bænkevarmer). Med andre ord, hvis vi ser på en dreng $n \in X$, vil vi sørge for at n enten komme til at danse med pigen $n + 1$ (n's udkårne) eller, hvis $n > 1$, med pigen $n - 1$ (n's tilbeder). Og tilsvarende for pigerne.

Nu er det faktisk også klart, hvordan vi må parre drengene og pigerne sammen for at alle kan komme ud at danse. Dreng 1, der er bænkevarmer, når pigerne byder op til dans, må nødvendigvis parres med pige 2. Tilsvarende må pige 1 nødvendigvis parres med dreng 2. Så er vi så langt (Fig. 2):

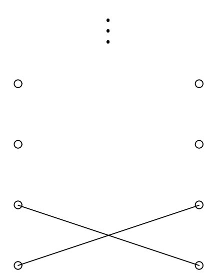


Fig. 2

Så ser vi, at dreng 3 nødvendigvis må parres med pige 4 – thi pige 2 (tilbederen) er optaget. Tilsvarende må pige 3 danse med dreng 4 – thi dreng 2 (tilbederen) er optaget.

Sådan kan vi fortsætte og ser, at vi føres til den fuldstændige sammenparring vist i Fig. 3 (hvor alle ulige gæster i Jessens balsal – drenge som piger – danser med deres udkårne).

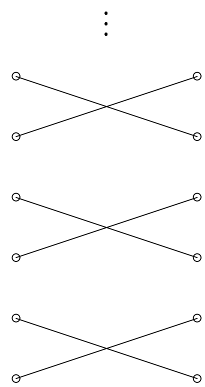


Fig. 3

Øvelse 13. Antag nu, at $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ og $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ er givet ved

1° $f(n) = n + 2$, $g(n) = n + 2$

2° $f(n) = n + 1$, $g(n) = n + 2$,

og vis, i hvert tilfælde, at princippet om at alle skal danse enten med deres udkårne eller deres tilbeder fører til en fuldstændig sammenparring af "drengene" med "pigerne".

Øvelse 14. Antag nu, at $X = Y = (0, \infty)$ og at inklinationerne $f : X \to Y$ og $g : Y \to X$ er givet ved

$$\begin{aligned} f(x) &= x + 1 \qquad ; \ x \geq 0 \\ g(y) &= y + 2 \qquad ; \ y \geq 0 \ . \end{aligned}$$

Find også i dette tilfælde en sammenparring af "drengene" og "pigerne", så alle kommer ud at danse og således, at hvis x og y danser sammen, så vil enten $f(x) = y$ eller $g(y) = x$.

Øvelse 15. Lad $X = [0, 1]$ og $Y = [0, 1)$ (intervallet Y har altså ikke højre endepunkt med). Se på inklinationerne $f : X \to Y$ og $g : Y \to X$ givet ved $f(x) = \frac{x}{2}$ og $g(y) = y$. Brug disse inklinationer til at konstruere en fuldstændig sammenparring af "drengene" og "pigerne".

Bemærkninger. Man kan overveje, om en fuldstændig inklination kan være kontinuert. Det er iøvrigt lærerigt at sammenligne med øvelserne 4–15 i [LM1].

Øvelse 16. De eksempler, der er angivet ovenfor (i øvelserne og i hovedteksten) fører alle til en entydigt bestemt sammenparring af drenge og piger ud fra de givne inklinationer $f : X \to Y$ og $g : Y \to X$, når vores princip om, at alle skal danse med en tilbeder eller den udkårne skal opretholdes. Konstruer simple eksempler, hvor den søgte sammenparring ikke er entydigt bestemt. (Se videre i Øvelserne 31–34).

Vi er nu så langt, at vi kan se, hvordan vi kan ræsonnere for at konstruere den ønskede sammenparring i Bernsteins ækvivalenssætning. Vi mangler bare at formalisere betragtningerne og løsrive os fra de konkrete eksempler. Det er måske bekvemt at indføre en sprogbrug:

Lad X og Y være mængder og $f : Y \to Y$ og $g : Y \to X$ inklinationer. Vi siger da, at

$$(y_1, x_1, y_2, \cdots, x_{n-1}, y_n)$$

er en *inklinationsstreng med udgangspunkt* y_1 såfremt

$$x_1 = g(y_1)\,,\ y_2 = f(x_1)\,,\ x_2 = g(y_2)\,,\ \cdots, y_n = f(x_{n-1})$$

(y_1 inklinerer for x_1, som inklinerer for y_2, som inklinerer for x_2 o.s.v.). De enkelte elementer $y_1, x_1, \cdots, y_n$ er *deltagerne* i inklinationsstrengen.

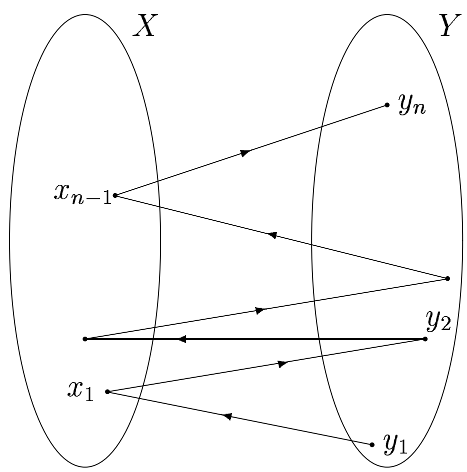


Fig. 4

Vi skriver også en inklinationsstreng på formen

$$y_1 \vdash x_1 \vdash y_2 \vdash \cdots \vdash y_n\ ,$$

hvilket harmonerer med den tidligere indførte notation $a \vdash b$ for "a inklinerer for b". Med denne sprogbrug er det ret let at formulere det ønskede bevis.

Bevis for Sætning 5. Lad $f : X \to Y$ og $g : Y \to X$ være inklinationer. Vi vil konstruere en sammenparring vejledt af to principper, dels vores standardprincip, at alle danser enten med deres udkårne eller med deres tilbeder, dels et princip om at vi kun vil lade en pige danse med sin udkårne, hvis det er strengt nødvendigt for at undgå bænkevarmere.

Lad B være mængden af alle piger, der er med i en inklinationsstreng, som har en bænkeværmer blandt pigerne som udgangpunkt:

$$B = \{\, y \in Y \mid \quad \begin{array}{l} \text{der findes } \; y_1 \vdash x_1 \vdash y_2 \vdash \cdots \vdash x_{n-1} \vdash y_n \\ \text{med } \; y_1 \notin f(X) \;\; \text{og} \;\; y_n = y \} \end{array}$$

(her kan n være et vilkårligt naturligt tal – tilfældet $n = 1$ svarer til at y selv er bænkevarmer).

Dansemesteren Cantor parrer nu alle piger i B med deres udkårne, og beder alle de par, der herved dannes om at gå ud at danse.

Dernæst beder Cantor alle de resterende drenge byde deres udkårne op til dans. Og se, nu danser alle! Lad os vise det.

Først bemærkes, at hvis x er en af de resterende drenge, så er hans udkårne, altså pigen $y = f(x)$, ikke blandt dem, der allerede danser, d.v.s. der gælder $y \notin B$. Dette indses let indirekte (ellers ville y være med i en inklinationsstreng af typen $y_0 \vdash \cdots \vdash y' \vdash x \vdash y$, hvor y_0 er en af bænkevarmerne, og så ville x allerede være ude at danse med pigen y').

Det er klart, at alle drenge danser. Men også alle piger danser. Hvis nemlig pigen y ikke kom ud at danse i første omgang, har hun selvfølgelig en tilbeder, lad os sige x, og x kan ikke være blevet budt op til dans i første omgang (thi var han det, ville vi have en inklinationsstreng af typen $y_0 \vdash \cdots \vdash y' \vdash x \vdash y$, hvor y_0 er en af bænkevarmerne, og så ville $y \in B$). Drengen x hører altså til de resterende drenge efter første sammenparring og har derfor, i henhold til Cantors instruks, budt sin udkårne, pigen y, op til dans.

Hermed er beviset ført.

Øvelse 17. Drengene og pigerne har hver aften, lige fra tidernes begyndelse, danset i Jessens Balsal. De skiftes, som rimeligt er, til at byde op til dans. Alle har deres faste foretrukne partner.

Generte er de, de unge mennesker – undtagen når der danses. Da går snakken til gengæld livligt. Men hver aften er der bænkevarmere – enten nogle drenge eller noge piger. Det ærgrer den gamle dansemester Cantor. Men han har en plan.

På den yderste dags morgen – det er dagen ω, den første dag med uendeligt mange forudgående dage – meddeler han, at ω-jubilæet skal fejres om aftenen, og det på en festlig måde, ved at alle danser. Meddelelsen hilses med skepsis og forsigtige mishagsytringer, som dog hurtigt lægger sig, da dansemesteren forsikrer, at ingen vil komme til at danse med en ukendt partner.

Aftenen oprinder. Dansemesteren, der altid har haft særlig ondt af de piger, der har været bænkevarmere, beder nu dem, og alle piger, der har hørt om disse stakler, om at byde deres udkårne op. Det gør de, og stiller op, parate til dans. Dernæst beder dansemesteren alle drenge, der endnu ikke er kommet på dansegulvet, om at inklinere for deres udkårne. Musikken spiller op, dansen kan begynde. Og se, alle danser! – Og den gamle dansemester glædede sig derved.

Diskutér! Sammenlign med beviset for Bernstein's ækvivalenssætning. Hvorfor måtte Cantor vente til ω-jubilæet med at sætte sin plan i værk?

Øvelse 18. Igen har vi to inklinationer $f : X \to Y$ og $g : Y \to X$ i tankerne. Bemærk først, at enhver dreng, og også enhver pige, fastlægger en uendelig inklinationsstreng. Pigen y fastlægger således en inklinationsstreng

$$y_1 \vdash x_1 \vdash y_2 \vdash \cdots \vdash y_n \vdash x_n \vdash \cdots$$

Bevis, at hvis y_1 er bænkevarmer, så er alle x'erne og alle y'erne forskellige i den uendelige inklinationsstreng med udgangspunkt i pigen y_1 ($i \neq j \Rightarrow x_i \neq x_j$ og $y_i \neq y_j$).

Benyt dette til at give et let bevis for Bernstein's ækvivalenssætning i det tilfælde, hvor en af mængderne X eller Y vides at være endelig.

Benyt også betragtningen til at vise, at enhver injektiv afbildning af en endelig mængde ind i sig selv er surjektiv.

Øvelse 19 (til formalisten). Lad $f : X \to Y$ og $g : Y \to X$ være injektive afbildninger. Sæt $h = f \circ g$ og definer mængderne $B_0, B_1, \cdots$ ved

$$B_0 = Y \setminus f(X)\ ,\ B_n = h(B_{n-1}) \ \text{ for } \ n \geq 1\ .$$

Vis, at $\varphi : Y \to X$ givet ved

$$\varphi(y) = \begin{cases} g(y) & \text{for } \ y \in \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n \\ \\ f^{-1}(y) & \text{ellers} \end{cases}$$

er en veldefineret afbildning, og at φ er en bijektion af Y på X. Sammenlign med hovedtekstens bevis for Bernstein's sætning.

4. Lidt udfordring.

Vi anfører her en række øvelser, der enten kræver mere snilde af læseren end de fleste tidligere øvelser (eller øvelserne i [LM1]), eller kræver mere baggrundsviden, specielt vedrørende regning med uendelige kardinaltal. Den fulde forståelse kræver i nogle tilfælde, at man er nogenlunde fortrolig med mængdelærens aksiomer, specielt udvalgsaksiomet.

Ganske kort skal nævnes nogle resultater, der ikke kan siges at være elementære, (resultaterne er også nævnt i [LM1]).

Lad X og Y være mængder. Så vil enten $|X| < |Y|$, $|X| = |Y|$ eller $|Y| < |X|$ gælde. Antag nu, at $|X| \leq |Y|$ og at Y er uendelig. Så er alle mængderne

$$Y \ , \ X \cup Y \ \text{ og } \ X \times Y$$

ækvipotente. (vedrørende produktmængden, skal det dog antages, at X er ikke-tom). Dette er velkendt, hvis X og Y er eksemplarer valgt blandt standardmængderne $\mathbb{N}$ og $\mathbb{R}$ (overvej!).

Øvelse 20. Antag at mængden X er uendelig og at $|X| < |Y|$. Bevis, at for enhver inklination $X \to Y$, vil $|B| = |Y|$, hvor B er mængden af bænkevarmere. (Sammenlign med Øvelse 3).

Øvelse 21. For en vilkårlig følge af mængder, findes en mængde med større kardinalitet end enhver af mængderne i følgen. Vis det!

Bemærkning. Det ligger snublende nær at konkludere heraf, at der er mere end tælleligt mange forskellige slags uendeligheder (thi for enhver afbildning, der til $n \in \mathbb{N}$ lader svare en uendelig mængde X_n, findes en mængde – en "bænkevarmer" – med større mægtighed end alle de andre). Forklar evt., hvorfor dette ræsonnement ikke er korrekt!

Konklusionen *er* rigtig. Der gælder endog, at for enhver mængde findes der "flere" forskellige slags uendeligheder end der er elementer i mængden!

Øvelse 22. Med $\mathbb{A}$ betegner vi mængden af *algebraiske tal,* dvs. mængden af reelle tal, er er rod i et polynomium med heltallige koefficienter. Med $\mathbb{N}^{(\mathbb{N})}$ betegnes mængden af alle endelige tupler af naturlige tal (f.eks. (1,3,17), (32), (1,2,3,4,5) der er hhv. en 3-tupel, en 1-tupel og en 5-tupel).

Bevis, at mængderne

$$\mathbb{N}, \ \mathbb{Z}, \ \mathbb{Q}, \ \mathbb{A} \ \text{ og } \ \mathbb{N}^{(\mathbb{N})}$$

alle er numerable, og dermed har samme mægtighed som $\mathbb{N}$.

Øvelse 23 Generelt betegner X^Y mængden af afbildninger $Y \to X$. Vis, at mængderne

$$2^{\mathbb{N}} \ , \ \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \ , \ (2^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}} \ \text{ og } \ (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$$

er ækvipotente.

Vejledning: Bemærk, at $(X^Y)^Z$ er ækvipotent med $X^{Y\times Z}$.

ØVELSE 24 Vis, at mængderne

$$\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q},\ \mathbb{R},\ \mathbb{R}^2,\ \mathbb{R}^3,\cdots\quad\text{og}\quad\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$$

alle er ækvipotente med $2^{\mathbb{N}}$.

Vejledning: Konstruer en injektion $\mathbb{R}\to\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ (eller måske én $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\to\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$; f.eks. kunne $-142,0987\cdots\curvearrowright(-143,9,0,1,2,\cdots)$). Udnyt resultaterne fra øvelserne 10 og 23.

ØVELSE 25. Bevis, at $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ og $2^{\mathbb{R}}$ er ækvipotente og slut, at der er "lige så mange" funktioner $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ som der er delmængder af $\mathbb{R}$. Der er altså utroligt mange funktioner $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, specielt er der "flere" end der er reelle tal.

Bemærkning. Når vi ser bort fra de mængder, der er tænkt på i Sætning 2 eller i Øvelse 21, har vi derfor med en konkret (velkendt ?) mængde at gøre, der er større end andre konkrete mængder, vi har set på.

ØVELSE 26. Generaliser resultatet i Øvelse 25 og vis, at for enhver uendelig mængde X er X^X og 2^X ækvipotente.

Vejledning: Sammenlign X^X med $(2^X)^X$.

ØVELSE 27. Lad os kalde et interval $I\subseteq\mathbb{R}$ *rationalt,* hvis begge endepunkterne er rationale, og et rektangel $I\times J\subseteq\mathbb{R}^2$ *rationalt,* hvis I og J er rationale. Vis, at mængden af rationale rektangler i $\mathbb{R}^2$ er tællelig.

Vis, at der findes en følge af rationale kvadrater $K_1, K_2,\cdots$, hvis foreningsmængde er den åbne enhedscirkel.

Lad os kalde en delmængde $G\subseteq\mathbb{R}^2$ *åben*, hvis der for ethvert punkt $(x,y)\in G$ findes et $\varepsilon>0$, således at cirklen med centrum (x,y) og radius ε er indeholdt i G. Vis, at enhver åben delmængde er en foreningsmængde af rationale kvadrater og slut heraf, at mængden af åbne delmængder af $\mathbb{R}^2$ er ækvipotent med $\mathbb{R}$ selv. (Der er altså "ganske få" sådanne delmængder).

ØVELSE 28. Bevis, at

$$|C(\mathbb{R})| = |\mathbb{R}| = |2^{\mathbb{N}}|\ ,$$

hvor $C(\mathbb{R})$ netop betegner mængden af kontinuerte reelle funktioner $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. (Der er altså ganske "få" kontinuerte funktioner – sammenlign med Øvelse 25).

Vejledning: Identifisér en kontinuert funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ med dens graf. Se på komplementet af grafen og udnyt resultatet af Øvelse 27. En anden (og måske noget enklere) idé: Udnyt, at to kontinuerte funktioner der stemmer overens på de rationale tal, er identiske.

Øvelse 29. Lad M betegne mængden af monotont voksende funktioner $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Vis, at der er ganske "få" af disse funktioner, forstået på tilsvarende måde som i Øvelse 28.

Vejledning: En monoton funktion er karakteriseret ved sine springsteder og funktionens værdier i de rationale tal og i springstederne.

Øvelse 30. Hvor "mange" polygoner er der i $\mathbb{R}^2$, når vi regner kanterne med til en polygon ? (Iøvrigt, prøv at definere en polygon præcist - ikke bare de konvekse).

Øvelse 31. Punktet $x \in X$ er *fixpunkt* for afbildningen $f : X \to X$, såfremt $f(x) = x$. Er der ingen fixpunkter, er f *fixpunktfri*. Det er intuitivt "oplagt", at til enhver mængde X med mere end ét element findes en fixpunktfri bijektion $f : X \to X$. Dette er også rigtigt, men ikke elementært (udvalgsaksiomet kan udnyttes).

Udnyt resultatet om fixpunktfrie bijektioner til at vise, at for enhver uendelig mængde X, er mængden af bijektioner $X \to X$ ækvipotent med 2^X.

Bemærkning. For $X = \mathbb{R}$ kan ovenstående let vises (uden at påberåbe sig ukendte resultater vedrørende fixpunktfrie afbildninger), såfremt kontinuumshypotesen antages at gælde. Der er altså "utroligt mange" bijektioner $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (men "næsten ingen" kontinuerte eller monotone funktioner).

Øvelse 32. Lad $f : X \to Y$ og $g : Y \to X$ være inklinationer. Vi siger, at en sammenparring (altså en bijektion mellem X og Y) er en *Schröder-Bernstein dans* såfremt det for alle par (x, y) i sammenparringen gælder enten, at $x \vdash y$ (altså $y = f(x)$) eller, at $y \vdash x$ (altså $x = g(y)$). Med $\mathrm{SB}(f \otimes g)$ betegner vi alle sådanne sammenparringer.

Ved en *inklinationscykel af længde* $2n$ (eller bare en *cykel*) forstås en inklinationsstreng af typen

$$x_1 \vdash y_1 \vdash x_2 \vdash \cdots x_n \vdash y_n \vdash x_1 \ ,$$

hvor $x_1, \cdots, x_n$ er n forskellige "drenge" og $y_1, \cdots y_n$ er n forskellige "piger".

Ved en *dobbelt undelig inklinationsstreng* (uden gentagelser) forstås en inklinationsstreng af typen

$$\cdots \vdash x_{-1} \vdash y_{-1} \vdash x_0 \vdash x_1 \vdash y_1 \vdash \cdots$$

som ikke indeholder cykler.

Bevis, at en Schröder-Bernstein dans er entydigt bestemt hvis og kun hvis der hverken findes cykler, udover sammenparringer (2-cykler) eller dobbelt uendelige inklinationsstrenge.

ØVELSE 33. Lad igen $f : X \to Y$ og $g : Y \to X$ være inklinationer. Betragt situationen som en *todelt graf*, hvor $x \in X$ og $y \in Y$ er forbundet med en kant, hvis og kun hvis $x \vdash y$ eller $y \vdash x$. Denne graf betegnes $f \otimes g$.

Bevis, at $f \otimes g$ falder i disjunkte bestanddele bestående af mængder af:

$2 -$ cykler (sammenparringer)
$4 -$ cyker
$6 -$ cykler
$\vdots$
dobbelt-uendelige inklinationsstrenge
inklinationsstrenge med et $x \in X \setminus g(y)$som udgangspunkt
inklinationsstrenge med et $y \in Y \setminus f(X)$ som udgangspunkt.

Bemærkning. Man kunne også bruge observationen til at definere *typen* af $f \otimes g$ (via en følge af kardinaltal).

ØVELSE 34. Find et eksempel på inklinationer f og g med $X = Y = \mathbb{N}$, så $SB(f \otimes g)$ og $2^{\mathbb{N}}$ er ækvipotente.

ØVELSE 35. Lad igen $f : X \to Y$ og $g : Y \to X$ være inklinationer. Bevis, at der findes $A \subseteq X, B \subseteq Y$ og en bijektion $\varphi : A \to B$ således, at

(i) For alle $\psi \in SB(f \otimes g)$ er ψ's restriktion til A identisk med φ.

(ii) f's restriktion til $X \setminus A$ er en bijektion $X \setminus A \to Y \setminus B$ og g's restriktion til $Y \setminus B$ er en bijektion $Y \setminus B \to X \setminus A$.

(iii) Hvis det om $x \in X$ og $y \in Y$ gælder, at $\psi(x) = y$ for alle $\psi \in SB(f \otimes g)$, så vil $x \in A$ og $y \in B$.

Bemærkning. A, B og φ er naturligvis entydigt bestemt; $A = B = \emptyset$ kan forekomme.

ØVELSE 36 *(Hall's sætning eller giftesætningen).* Hvordan kan drengene bestemme sig for, hvem de vil byde op til dans? Givet er, som sædvanlig, X, drengemængden, og Y, pigemængden. Der er endvidere givet en relation $R \subseteq X \times Y$, hvor $y \in R(x)$ (altså xRy eller $(x, y) \in R$) tolkes "x kan godt lide y". Vi siger, at *R tillader en (drenge-) inklination* såfremt der findes en inklination $f : X \to Y$ med $f \subseteq R$.

(i) Bevis, at såfremt R tillader en inklination, må *Hall's betingelse* (udvidet form):

$$\forall X_0 \subseteq X : |R(X_0)| \geq |X_0|$$

gælde.

(ii) Bevis, at såfremt $R(x)$ er endelig for alle $x \in X$, såfremt *Hall's betingelse:*

$$\forall X_0 \subseteq X \ , \ X_0 \ \text{ endelig } \ : |R(X_0)| \geq |X_0|$$

er opfyldt og såfremt R er minimal (dvs. $S \subseteq R$, S opfylder Hall's betingelse $\Rightarrow S = R$), så er R selv en injektion.

Vejledning: Antag $R(x_0)$ indeholder mindst to punkter y_1 og y_2. Udnyt minimaliteten til at finde to mængder X_1 og X_2 som ikke indeholder x_0 således, at $X_1 \cup \{x_0\}$ og $X_2 \cup \{x_0\}$ bryder Hall's betingelse, hvis henholdsvis (x_0, y_1) eller (x_0, y_2) fjernes fra R. Så vil $R(X_1)$ indeholde alle punkter i $R(x_0)$ på nær y_1, og X_1 er en *kritisk* mængde, dvs. en endelig mængde, så $R(X_1)| = |X_1|$. Tilsvarende ræsonnement kan anvendes på X_2. Vis nu, at foreningsmængden af to kritiske mængder er kritisk og udnyt dette til at indse, at $X_1 \cup X_2 \cup \{x_o\}$ bryder Hall's betingelse (for relationen R)!

(iii) Bevis *Hall's sætning* i det endelige tilfælde, dvs.: såfremt R opfylder Hall's betingelse, såfremt $R(x)$ er endelig for alle $x \in X$ og såfremt X er endelig, så tillader R en inklination.

Bemærkninger: Læsere, der behersker Zorn's lemma vil umiddelbart kunne bevise Hall's sætning generelt (dvs. udsagnet i (iii), men uden en forudsætning om at X er endelig).

Såfremt man dropper betingelsen om endelighed af $R(x)$'erne, er det mere naturligt at se på Hall's betingelse i udvidet form og spørge, om denne i sig selv sikrer, at R tillader en inklination. Dette er dog ikke tilfældet – man kan angive eksempler, der viser, at der skal mere til (overvej!).

Påstand: Det bevis for Hall's sætning, der er lagt op til, er det kortest tænkelige – og mest elegante! Beviset er imidlertid ikke konstruktivt. For en fremstilling, der tilgodeser det konstruktive, algoritmiske aspekt, se [GH], Kapitel VI.

ØVELSE 37 (*haremssætningen*). Lad, som i Øvelse 36, R være en relation mellem X og Y. Antag, at $R(x)$ er endelig for alle $x \in X$ og antag desuden, at for et $n \in \mathbb{N}$ gælder

$$\forall X_0 \subseteq X, X_0 \text{ endelig } : |R(X_0)| \geq n|X_0|.$$

Bevis, at der findes en relation $R' \subseteq R$ med $|R'(x)| = n$ for alle $x \in X$ og således, at mængderne $(R'(x))_{x \in X}$ er parvis disjunkte.

ØVELSE 38 (*ungkarlesætningen*). Antag nu, at $R \subseteq X \times Y$ opfylder betingelsen $R(x)$ endelig for alle $x \in X$ samt betingelsen

$$\forall X_0 \subseteq X, \ X_0 \text{ endelig } : |R(X_0)| \geq |X_0| - \delta,$$

hvor δ er et fast naturligt tal (eller 0).

Vis, at der findes en partiel injektion $f \subseteq R$, som er defineret overalt på X på nær højst δ punkter ("ungkarlene"). Præcisér evt. først påstanden (hvad mon der forstås ved en partiel injektion ?).

ØVELSE 39. Lad A være en $n \times n$ dobbelt stokastisk matrix (de n^2 elementer i A er alle ikke-negative, og alle rækkesummer såvel som alle søjlesummer er 1). Bevis, at der findes en permutation τ af $\{1, 2, \cdots, n\}$ således, at $a_{i,\tau(i)} > 0$ for alle $i = 1, 2, \cdots, n$.

Vejledning: Anvend Hall's sætning med R en passende relation, der til enhver række i A knytter visse søjler i A.

Bemærkning. Resultatet kan af den energiske læser udnyttes til at vise, at permutationsmatricerne netop er de ekstremale dobbelt stokastiske matricer.

ØVELSE 40. Ethvert bevis for Cantors sætning må udnytte "kontinuiteten" af de reelle tal. I Cantors oprindelige bevis fra 1873 udnyttes, at en vilkårlig følge $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \cdots$ af lukkede intervaller, hvis længder konvergerer mod 0, indeholder et fælles punkt. Hvordan mon Cantor ræsonnerede ?

Vejledning: Sørg for at det fælles punkt bliver bænkevarmer.

ØVELSE 41 (en sætning af Sierpinski). Vis, at der findes en familie $(A_i)_{i \in I}$ af delmængder af $\mathbb{N}$ som opfylder betingelserne

$$\begin{array}{l} \forall\, i : A_i \;\text{ er uendelig} \\ \forall\, i \neq j : A_i \cap A_j \;\text{ er endelig} \\ I \text{ er ækvipotent med } \; 2^{\mathbb{N}}. \end{array}$$

Kan anden betingelse strammes til et krav om at A_i'erne skal være parvis disjunkte ?

Vejledning: Udnyt, at der for ethvert reelt tal findes en følge af forskellige rationale tal som konvergerer mod tallet.

Litteraturhenvisninger

[LM1] Lars Mejlbo: *Uendelighedens paradokser*,
Matematiklærerforeningen, 1991

[LM2] Lars Mejlbo: Om det uendelige,
Matematiklærerforeningen, 1991.

To let-tilgængelige hæfter, der også udmærker sig ved at være på dansk og billige. Kan rekvireres fra LMFK sekretariatet, Slotsgade 2, 2200 København N.

[GH] Klaus Grünbaum, Tom Høholt: *Kombinatorik med anvendelser,*
Matematisk Institut, Danmarks Tekniske Højskole, 1980.

Ganske vist indeholder bogen ikke "uendelig kombinatorik". Den er anført i forbindelse med Øvelse 35 (Hall's sætning). Behandlingen af dette emne (Kapitel VI) er elementær og fører til vigtige algoritmer.

[HH] Torkil Heiede, Hans Jørgen Helms: *Mængdelære og transfinite kardinaltal,*
Universitetsforlaget, Oslo, 1964. (Også udgivet i Nordisk
Matematisk Tidsskrift, vol 10 (1962)).

En elementær artikel. Den noget vidtløftige behandling gør dog, at det kan være svært at "se skoven for bare træer". Bogen er skrevet på et tidspunkt, hvor mængdelæren trængte sig på i skolens undervisning, og mange lærere havde behov for at læse en omhyggelig fremstilling af dette emne. Kommer (næsten) ikke ind på aksiomatisk mængdelære.

[H] Paul R. Halmos: *Naive Set Theory,*
D.van Nostrand, Princeton, 1960.

En matematisk behandling af aksiomatisk mængdelære, som er omhyggelig og ikke alt for teknisk. Når dog ikke så langt.

[HJ] Karel Hrbacek. Thomas Jech: *Introduction to Set Theory,*
Marcel Dekker, New York, 1984.

En mere teknisk bog end Halmos'. Kræver universitetsniveau. Mange afsnit er dog både spændende og interessante selv uden alt for stor baggrundsviden.

[R] Rudolf von B. Rucker: *Infinity and the Mind. The science and philosophy of the infinite,*
Birkhäuser, Boston, 1982

En bredt skreven bog, der for en stor dels vedkommende kan læses med udbytte af "alle". Den prøver dog også at give et indtryk af mere "hidsige" og svært tilgængelige emner, som f.eks. store kardinaltal.

[KD1] Keith Devlin: *Mathematics: The New Golden Age,* Penguin, New York, 1990.

En spændende bog, der indeholder en række "appetitvækkere", herunder kapitel 2: "Sets, Infinity, and the Undecidable". Her fokuseres bl.a. på nødvendigheden af aksiomatisk mængdelære.

[KD2] Keith Devlin: *Fundamentals of Contemporary Set Theory,* Springer-Verlag, Berlin, 1980.

Desværre har jeg ikke haft adgang til denne bog, men efter at have set [KD1], har jeg tiltro til at den holder, hvad den lover: "A gentle but thorough introduction to set theory… ".

[MLF] *Matematiklærerforeningen: Matematiske Ideer, Matematiklærerforeningen, 1993.*

En spændende samling af "appetitvækkere", som der arbejdes på i øjeblikket. Jeg har selv sendt et bidrag – ganske kort, ca. 3 sider – om Jessens Balsal og Hilbert's Hotel. Her findes bl.a. hvad jeg vil betegne som den ultamative fortælling om Hilbert's Hotel (dette være sagt for at vække nysgerrigheden!). ⟨Tilføjelse: Se disse noter, JB HH⟩