Ekstra ugeopgaver

1. [GRP2: 16] *Lad $k = k(\sigma)$ være tallet defineret i GRP(2.18.1), altså som summen $k = \sum(p-1)m_p(\sigma)$. Som nævnt kan σ kan skrives som produkt af k transpostioner. Vis, at σ ikke kan skrives som produkt af færre end k transpositioner.

2. [TAL3: 17] Lad a, n være to naturlige tal, og lad d være den største fælles divisor for a, n. Der findes da fremstillinger $d = xa - yn$ med hele tal x, y. Vis, at der er et entydigt valg af x, y således, at $1 \leqslant x \leqslant n/d$, og at der med dette valg gælder $0 \leqslant y < a/d$.

3. Bestem cykelfremstillingen af $(1\,2\,3\ \ldots\ n)\cdots(1\,2\,3\,4)(1\,2\,3)(1\,2)$.

4. *Bestem cykelfremstillingen af $(1\,2)(1\,2\,3)(1\,2\,3\,4)\cdots(1\,2\,3\ \ldots\ n)$.

5. For primtallene 5, 13 og 17 har vi $5 = 2^2 + 1^2$, $13 = 3^2 + 2^2$, og $17 = 4^2 + 1^2$. Derimod kan 7, 11 og 19 ikke skrives som en sum af to kvadrater. Prøv med nogle flere primtal, og formuler en sætning. *Bevis sætningen.

6. For hvilke $n = 2, 3, \ldots, 25$ er gruppen af primiske restklasser $(\mathbb{Z}/n)^*$ cyklisk? Prøv eventuelt med nogle flere værdier af n, og formuler en sætning. *Bevis sætningen.

7. Lad N være en normal undergruppe af gruppen G. To sideklasser, $A_1 = g_1N$ og $A_2 = g_2N$, er specielt delmængder af G. Produktet A_1A_2 har derfor to definitioner, i GRP(4.1) og i GRP(4.15). Giver de to definitioner samme resultat?

8. Findes der 1.000.000 på hinanden følgende ikke-kvadratfrie naturlige tal?

9. Bestem antallet af løsninger modulo n til kongruensen $x^2 \equiv 1$.

10. [GRP1: 21] *Vis, at en ikke-tom mængde G med en associativ komposition '$*$' er en gruppe, hvis og kun hvis der for alle $a, b \in G$ gælder, at ligningerne $a * x = b$ og $y * a = b$ har løsninger $x, y \in G$.

11. [TAL3: 16] Vis, for $n \geqslant 3$, at der er uendelig mange primtal p med $p \not\equiv 1 \pmod{n}$.

12. [GRP4: 23] *Dirichlet's sætning udsiger, at når $(a, n) = 1$, så findes der uendelig mange primtal p med $p \equiv a \pmod{n}$. Vis, at der findes uendelig mange primtal p med $p \equiv 1 \pmod{4}$. [Vink: kig på en primdivisor p i $(2p_1 \cdots p_k)^2 + 1$, og anvend GRP(4.17) på $G := (\mathbb{Z}/p)^*$ og et passende g.]

13. Er det muligt at dele en terning i 1992 terninger (naturligvis ikke alle af samme størrelse)? [Kilde: Lettisk konkurrence — for 9. klasse! Jeg syntes, den var svær!]

14. [GRP7: 22] For en undergruppe H af en endelig gruppe G virker G ved translation på mængden $X = G/H$ af sideklasser. Bestem isotropigruppen for en given sideklasse xH. Bestem kernen for den tilhørende repræsentation $G \to \mathrm{Perm}(G/H)$.

15. [GRP7: 23] Antag, at p er den mindste primdivisor i ordenen af G, og at H er en undergruppe af index p. Vis, at H er normal.

16. [RNG1: 20] Kvaternion-enhederne $\mathbf{1}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ tilhører ringen $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$. Vis, at matricerne af formen $a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$, for reelle tal (a, b, c, d), udgør en delring $\mathbb{H}$ af $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$. Vis, at $\mathbb{H}$ er et skævlegeme.

17. Vis det omvendte af Wilson's sætning, for $n \geqslant 2$: Hvis $(n-1)! \equiv -1 \pmod{n}$, så er n et primtal. Hvad med det omvendte af Fermat's sætning?

18. [RNG6: 19] Lad ξ være et (irrationalt) kvadratisk tal med diskriminant D. Vis, for et ulige primtal p, at p er et primelement i $\mathbb{Z}[\xi]$, hvis og kun hvis D modulo p ikke er et kvadrat.

19. Når n er primopløst, $n = p_1^{\nu_1} \cdots p_r^{\nu_r}$, er det let at bestemme antallet af (positive) divisorer i n: det er produktet $(\nu_1+1)\cdots(\nu_r+1)$. Kan du finde en formel for summen $\sigma(n)$ af divisorerne i n?

20. Et tal n kaldes *fuldkomment*, hvis n er lig med summen af sine divisorer, fraregnet n selv, altså hvis $\sigma(n) = 2n$. Eksempler: $6 = 1+2+3$ og $28 = 1+2+4+7+14$. Vis (Euklid), at hvis $2^k - 1$ er et primtal, så er $n = 2^{k-1}(2^k - 1)$ fuldkomment. Vis omvendt (Euler), at ethvert lige fuldkomment tal er af denne form. (Man ved ikke om der findes ulige fuldkomne tal.)

21. Bestem modulo 101 en liste med mindst 20 primiske restklasser og deres inverse – på højst 2 minutter. [Vink: prøv at faktorisere 100 og 102.]

22. For antallet $p(n)$ af cykeltyper i S_n (altså partitioner af n) gælder trivielt, at $p(n) = \sum p_h(n)$, hvor $p_h(n)$ er antallet af cykeltyper med h som den mindste længde af en cykel. Øjensynlig er $p_n(n) = 1$ og $p_h(n) = 0$ for $n/2 < h < n$. Vis for $h < n$, at $p_h(n) = \sum_{h \leqslant k \leqslant n-h} p_k(n-h)$ og overvej, at dette kan bruges til en rekursiv bestemmelse af $p(n)$.

23. For en permutation $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ (i den direkte notation) bestemmes antallet af inversioner $\ell(\sigma)$ sådan: man gennemløber pladserne, for $i = 1, \dots, n$, og tæller for hver plads i hvor mange gange, der på en senere plads står et tal, der er mindre end det i'te: $\sigma_j < \sigma_i$. Antag, at $\sigma_k > \sigma_{k+1}$, og lad σ' være permutationen, der (i den direkte notation) fås fra σ ved at ombytte tallene σ_k og σ_{k+1}. Vis, at $\ell(\sigma') = \ell(\sigma) - 1$. Slut heraf, at σ kan skrives som produkt at $\ell(\sigma)$ nabotranspositioner, og specielt, at $\operatorname{sign}(\sigma) = (-1)^{\ell(\sigma)}$.

24. [RNG2: 11] Lad R være en kommutativ ring, og lad $\mathfrak{a}$ være et ægte ideal. Antag, at $R \setminus \mathfrak{a} \subseteq R^*$ (altså at hvert $r \in R$ med $r \notin \mathfrak{a}$ er invertibelt i R). Vis, at $R/\mathfrak{a}$ er et legeme og at $\mathfrak{a}$ er et maksimalideal. Vis, at $\mathfrak{a}$ er det eneste maksimalideal i R.

25. [RNG6: 18] Lad p være et ulige primtal. Vis for hele tal b, c og $D := b^2 - 4c$, at kongruensen $z^2 - bz + c \equiv 0 \pmod{p}$ har løsninger, hvis og kun hvis kongruensen $x^2 \equiv D \pmod{p}$ har løsninger.

26. [RNG6: 20] Afgør om den diofantiske ligning $x^2 + xy - y^2 = 17$ har løsninger.

27. [RNG6: 21] Lad $R = \mathbb{Z}[\xi]$ være en kvadratisk talring med diskriminant D. Vis, at R er euklidisk for $D = -3, -4, -7, -8, -11$. Vis, at R er euklidisk for $D = 5, 13$. Vis, at R er euklidisk for $D = 17$.

28. [GRP4: 24] *Bestem kommutatorundergrupperne S_n' og A_n'. [Vink: For $n \geqslant 5$ er enhver 3-cykel en kommutator af to 3-cykler. Undersøg også hvad der sker for $n \leqslant 4$.]

29. [TAL2: 15] En følge af naturlige tal a_n defineres ved forskriften

$$a_n := \lfloor 10^{n-1}\pi/2 \rfloor \bmod 10^{100} + 1,$$

hvor $\lfloor \alpha \rfloor$ er den hele del af det reelle tal α og $x \mod d$ betegner den principale rest af x ved division med d. Vis, at $S := \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ er en begrænset delmængde af $\mathbb{N}$. Lad m være det mindste tal i S. Vis, at $1 \leqslant m \leqslant 2$. Kan du afgøre hvilken af de to muligheder der indtræffer?

30. *Et berømt resultat af Lagrange udsiger, at ethvert naturligt tal er en sum af fire ikke-negative kvadrater; her må nogle af kvadraterne altså være 0. Angiv eksplicit en funktion $f\colon \{5, 6, 7, ...\} \to \mathbb{N}$ således, at der for ethvert $k \geqslant 5$ gælder: Hvis $n \geqslant f(k)$, så er n en sum af k positive kvadrater.

31. [GRP1: 22] *Antag, at G er en mængde med en associativ komposition '$*$', som har et *venstreneutralt* element e, dvs $e * x = x$ for alle $x \in G$. Vis, at hvis hvert element x har et *venstreinverst* x', dvs $x' * x = e$, så er G en gruppe.

Vis, at hvis hvert element x har et *højreinverst* x', dvs $x * x' = e$, så er G ikke nødvendigvis en gruppe.

Vis, at hvis man ud over eksistensen af højreinverse elementer yderligere antager: af $a * x = b * x$ for alle x følger $a = b$, så er G en gruppe.

32. Lad $p(n)$ være antallet af cykeltyper i S_n, altså antallet af partitioner af n, og lad $p_h(n)$ være antallet af typer, hvor længden af den største cykel er h. Øjensynlig er $p(n) = \sum_{h=1}^{n} p_h(n)$. Vis rekursionsformlen: $p_n(n) = 1$ og for $h < n$ er $p_h(n) = \sum_{k=1}^{h} p_k(n-h)$.

33. Lad der være givet en bijektiv afbildning $\mu\colon X \to Y$. Gør rede for, at hvis σ er en permutation af X, så er ${}^{\mu}\sigma := \mu\sigma\mu^{-1}$ en permutation af Y. Vis, at hvis σ er produkt af disjunkte cykler $(x_1 \ \dots \ x_p)$, så er ${}^{\mu}\sigma$ produkt af de tilsvarende disjunkte cykler $(\mu(x_1) \ \dots \ \mu(x_p))$.

34. [TAL2: 16] Vis, at $1^4 + 2^4 + \cdots + n^4 = n(6n^4 + 15n^3 + 10n^2 - 1)/30$.

35. [TAL6: 12] Lad n være et naturligt tal, fremstillet med k cifre i 10-talssystemet. Antag, at n' er fremkommet af n ved ombytning af de k cifre. Vis, at tallet $n - n'$ er deleligt med 9.

36. [TAL3: 18] Et naturligt tal $p > 1$ har følgende egenskab: $p \mid ab \implies p \mid a$ eller $p \mid b$. Vis, at p er et primtal.

37. [TAL2: 17] Vis, at alle naturlige tal n er karakteriseret ved en interessant egenskab. [Vink: brug Velordningsprincippet.]

38. Lad n være et naturligt tal primisk med 10. Vis, at der findes et multiplum af n, som i 10-talssystemet skrives med lutter 1-taller.

39. [TAL3: 19] Antag for naturlige tal a, b, c, d, at $ab = cd$. Vis, at $a \mid c \iff d \mid b$.

40. [TAL3: 20] Antag, at $n \mid ab$ $(n \geqslant 1)$, og sæt $d := (a, n)$. Vis, at $\frac{n}{d} \mid b$ ved at bruge en fremstilling $d = xa + yn$. [Vink: Indsæt fremstillingen i bd.]