

### Obligatorisk opgave nr. 2

Besvarelsen afleveres til instruktoren, eventuelt i instruktorens box, senest den 16/4 kl 12.00.

1. Bestem et helt tal  $a$  således, at  $a \equiv 2 \pmod{9}$ ,  $a \equiv 3 \pmod{10}$ , og  $a \equiv 4 \pmod{11}$ . Hvilken orden, i gruppen  $(\mathbb{Z}/990)^*$ , har restklassen af  $a$  modulo 990?
2. Betragt, i gruppen  $S_{2004}$ , de to cykler,  $\gamma_1 := (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10)$  og  $\gamma_2 := (1\ 3\ 5\ 7\ 9)$ . Angiv fremstillingerne af  $\gamma_1\gamma_2$  og  $\gamma_2\gamma_1$  som produkt af disjunkte cykler.
3. Angiv cykeltype, fortegn og orden for permutationen i gruppen  $S_{2004}$ :  
(1 3 5 ... 2003)(2 4 6 ... 2004).
4. Betragt 5-cyklen  $\sigma = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)$  som permutation i  $S_6$ . Bestem antallet af permutationer i  $S_6$  som er konjugerede med  $\sigma$ . Angiv dernæst permutationerne i centralisatoren for  $\sigma$ .
5. Gør rede for, at diedergruppen  $D_{167}$  naturligt kan opfattes som undergruppe af diedergruppen  $D_{1002}$ . Angiv to ikke-isomorfe grupper af orden 2004, som indeholder en undergruppe isomorf med  $D_{167}$ .
6. Bestem i diedergruppen  $D_{1000}$  antallet af elementer af orden 1, 2, 3, 4, og 5.
7. Vis, at Klein's Vierer-gruppe  $V$  er isomorf med en undergruppe af diedergruppen  $D_n$ , hvis og kun hvis  $n$  er lige.
8. Bestem antallet af abelske grupper af orden 144 (på nær isomorfi).
9. Betragt nedenstående 6 grupper:  
$$G_1 := C_2 \times C_{10} \times C_{100}, \quad G_2 := C_4 \times C_4 \times C_{125}, \quad G_3 := C_4 \times C_5 \times C_{100},$$
$$G_4 := C_4 \times C_{10} \times C_{50}, \quad G_5 := C_4 \times C_{20} \times C_{25}, \quad G_6 := C_4 \times C_{500}.$$
Bestem de par  $(i, j)$  med  $i < j$  for hvilke grupperne  $G_i$  og  $G_j$  er isomorfe.
10. I en kommutativ gruppe  $G$  af orden 120 findes et element af orden 24. Vis, at  $G$  er cyklisk.
11. Talrummet  $\mathbb{R}^4$  kan opfattes som mængden af afbildninger  $\{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \mathbb{R}$ . Følgelig virker  $S_4$  på  $\mathbb{R}^4$ . Bestem isotropigruppen for vektoren  $(1, 0, 1, 0)$ . Angiv en vektor, hvis isotropigruppe har orden 2.
12. Hvor mange perlekæder med 8 perler kan der laves, når der er to farver perler at vælge imellem?
13. Hvor mange karusseller med 8 heste kan der laves, når der er to farver (træ-)heste at vælge imellem?
14. Bestem antallet af grupper af hver af følgende ordener: 351, 358, 359, 361.
15. Lad  $\varphi: \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/8 \rightarrow \mathbb{Z}/4$  være en surjektiv homomorfi. Vis, at kernen er (isomorf med)  $\mathbb{Z}/4$  eller  $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$ . Vis, at begge muligheder kan forekomme (med passende valg af  $\varphi$ ).

Det er en betingelse for at gå til eksamen, at man får godkendt begge obligatoriske opgaver af samme instruktør her foråret, eller fik dem godkendt i 2003. Studerende, der ønsker godkendelsen fra 2003 overført til den kommende eksamen, skal henvende sig til undertegnede.

Anders Thorup