Facitliste til eksamensopgaver

Facit til de første 14 opgavesæt er blevet til paa basis af Jonas B. Rasmusssens facitliste. Han regnede størstedelen af opgaverne, medens han fulgte kurset, og har siden som instruktor hjulpet med at komplettere listen og rette fejl i den. Listen indeholder facit til mere end 200 opgaver, og den ændres løbende, saa den er næppe uden fejl.

Bemærk, at de facitter, der står på listen, næsten *aldrig* er tilstrækkeligt svar på opgaven.

Sommer 1996

1. C_{260}, $C_2 \times C_{130}$ og D_{130}.
2. Benyt at S_4 ikke indeholder elementer af orden 6 (betragt de mulige cykeltyper).
3. $f(x)$ er reducibel i $\mathbb{R}[X]$.
4. $f(x)$ er irreducibel i $\mathbb{Q}[X]$.
5. $f(x)$ er reducibel i $\mathbb{Z}_5[X]$.
6. $\sigma\tau = (1\,3)(2\,4\,5\,6)$ og $\tau\sigma = (1\,2)(3\,4\,5\,6)$, så $|\sigma\tau| = |\tau\sigma| = 4$.
7. $(1\,2\,3)(1\,2\,4) = (1\,3)(2\,4)$.
8. 45.
9. Benyt at elementer af samme cykeltype som τ må tilhøre den mindste normale undergruppe af S_6 indeholdende τ, og benyt så at 3-cyklerne i S_6 frembringer A_6.
10. 144 og $\mathcal{C}(\sigma) = \langle\sigma\rangle$.
11. Benyt Sylows sætninger ($260 = 2^2 \cdot 5 \cdot 13$).
12. $50 = -i(1+i)^2(2+i)^2(2-i)^2$.
13. 198.
14. $x+1$.
15. Benyt at $g(x) \nmid f(x)$ indenfor $\mathbb{Z}_2[X]$.

Vinter 1996–97

1. C_{140}, $C_2 \times C_{70}$, D_{70} og $C_{10} \times D_7$.
2. $\langle D\rangle$ og $\langle D^2, S\rangle$.
3. $f(x)$ er reducibel i $\mathbb{R}[X]$.
4. $f(x)$ er irreducibel i $\mathbb{Q}[X]$.
5. $f(x)$ er irreducibel i $\mathbb{Z}_5[X]$.
6. $\sigma\tau = (1\,2\,3\,4\,5)(6\,7)$ og $\tau\sigma = (1\,2\,3\,4\,6)(5\,7)$, så $|\sigma\tau| = |\tau\sigma| = 10$.
7. Benyt at μ er et produkt af disjunkte transpositioner.
8. 105.
9. 8, 9, 11, 13, 14 og 15.
10. 840 og $\mathcal{C}(\sigma) = \langle\sigma\rangle$.
11. Benyt Sylows sætninger ($140 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7$).
12. $1+i$, $1+2i$ og $1+4i$ er irreducible, og $1+3i = (1+i)(2+i)$ og $1+5i = (1+i)(3+2i)$.
13. 92.
14. $g(x)$ er irreducibel i $\mathbb{Z}_2[X]$ da det ikke har rødder i $\mathbb{Z}_2$, og at det er det eneste ses ved eftersyn.

15. $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$, $x^4 + x^3 + 1$ og $x^4 + x + 1$.

Sommer 1997

1. $\sigma = (1\,5\,3)(2\,6\,4)$ og $\mathrm{sign}(\sigma) = 1$.
2. $2^3 4^1$.
3. Vis konkret at den eneste kommutative gruppe der opfylder kravet er den cykliske.
4. Vis og benyt at $|(g_1, g_2)| \mid n$ hvis og kun hvis $|g_1|, |g_2| \mid n$.
5. 1 i C_{60}, 15 i A_5, 3 i A_4, 31 i D_{30} og 23 i $D_3 \times D_5$.
6. Benyt at en cyklisk undergruppe af orden 4 kun kan indeholde drejninger.
7. For $f \in X$ er $(S_4)_f \simeq S_k \times S_{4-k}$ hvor k er antallet af elementer f sender i 0.
8. 5.398.083.
9. Benyt Sylows sætninger.
10. Benyt Sylows sætninger ($880 = 2^4 \cdot 5 \cdot 11$).
11. 6.
12. $f(x)$ er reducibel i $\mathbb{R}[X]$.
13. $f(x)$ er irreducibel i $\mathbb{Q}[X]$.
14. $f(x)$ er reducibel i $\mathbb{F}_2[X]$.
15. $11 + 2i = (1 + 2i)(2 - i)^2$.

Vinter 1997–98

1. $a = 29$ og $|[a]_{72}| = 6$.
2. $\mathrm{sign}(\sigma) = 1$ og 3^3.
3. id, $(1\,2)(3\,4)$, $(1\,2\,3)$, $(1\,2)(3\,4\,5\,6)$, $(1\,2\,3\,4\,5)$, $(1\,2)(3\,4)(5\,6\,7)$ og $(1\,2\,3\,4\,5\,6\,7)$.
4. 1120.
5. Benyt at nogle af grupperne er kommutative, og betragt elementordener for at vise resten.
6. Benyt at en undergruppe isomorf med Kleins Vierer-gruppe må indeholde drejninger.
7. Vis konkret at den eneste kommutative gruppe der opfylder kravet er den cykliske.
8. $(S_4)_{(1,1,0,0)} = \{\mathrm{id}, (1\,2), (3\,4), (1\,2)(3\,4)\}$ og $(0, 0, 1, 2)$.
9. Benyt Sylows sætninger.
10. 105.918.450.471.
11. $x^{12} - 10$ er irreducibel i $\mathbb{Q}[X]$.
12. $(X^2 + X + 1)^2$.
13. 10.
14. $2 + \sqrt{-7} \mid 1 + 6\sqrt{-7}$ og $2 + \sqrt{-7}$ har kun de trivielle divisorer ± 1 og $\pm(2 + \sqrt{-7})$.
15. 1, 2 og 6.

Sommer 1998

1. $a = 77$ og $|[a]_{180}| = 12$.
2. Benyt afbildningen på elementet xy.

3. Hvis σ betegner permutationen, så er $\sigma = (0\,5)(1\,8\,9\,2)(3\,4\,7\,6)$, $|\sigma| = 4$ og $\operatorname{sign}(\sigma) = -1$.
4. 240.
5. 12.
6. Benyt Sylows sætninger.
7. Benyt Sylows sætninger.
8. Vis konkret at de kommutative grupper ikke indeholder 8 elementer af orden 24.
9. 30.
10. 36.
11. Betragt primringen for L.
12. $f(x)$ er reducibel i $\mathbb{R}[X]$.
13. $f(x)$ er irreducibel i $\mathbb{Q}[X]$.
14. $f(x)$ har ikke en rod i $\mathbb{F}_{17}$.
15. 216.

Vinter 1998–99

1. $a = 31$ og $|[a]_{100}| = 10$.
2. Benyt at elementer af orden større end 2 optræder i par.
3. Hvis σ betegner permutationen, så er $\sigma = (0\,2\,6\,4)(1\,9\,5\,7)$, $|\sigma| = 4$ og $\operatorname{sign}(\sigma) = 1$.
4. 315.
5. 68.
6. Benyt Sylows sætninger.
7. Benyt Sylows sætninger.
8. 72.
9. 108.
10. Betragt primringen for L.
11. $f(x)$ er reducibel i $\mathbb{R}[X]$.
12. $f(x)$ er irreducibel i $\mathbb{Q}[X]$.
13. $f(x) = (x^2+1)(x^2+x+2)$.
14. $\mathrm{N}(16+15i) = 481 = 13 \cdot 37$ og $16+15i = (3+2i)(6+i)$.
15. 192.

Sommer 1999

1. $|[2]_{385}| = 60$.
2. $\sigma^{1999} = (1\,4\,3\,2)(5\,7\,6)$.
3. Hvis σ betegner permutationen, så er $\sigma = (0\,3)(1\,4\,7\,6\,9\,2)(5\,8)$, $|\sigma| = 6$ og $\operatorname{sign}(\sigma) = -1$.
4. Der findes elementer af orden 15 i S_8, men ikke i S_7 (og enhver gruppe af orden 15 er cyklisk).
5. 105 i S_7 og ingen i A_8.
6. Benyt at en undergruppe af ulige orden ikke kan indeholde spejlinger.

7. Benyt at et element af orden 2 er sin egen invers.
8. $p + 1$.
9. Bestem ordenen af en Sylow-3-undergruppe.
10. 120.
11. Benyt at ζ er rod i $x^8 - 1$.
12. $f(x)$ er reducibel i $\mathbb{R}[X]$.
13. $f(x)$ er irreducibel i $\mathbb{Q}[X]$.
14. $f(x) = (x^2 + 2)(x^2 + 3)$.
15. $\mathrm{N}(12 + 5\sqrt{-7}) = 319 = 11 \cdot 29$ og $12 + 5\sqrt{-7} = (2 - \sqrt{-7})(-1 + 2\sqrt{-7})$.

Vinter 1999-00

1. $[2]_{1999}^{-1} = [1000]_{1999}$.
2. $|[2]_{495}| = 60$.
3. Vis at $x \mapsto x^3$ er en permutation af $\mathbb{Z}/10$.
4. $|\sigma^{2000}| = 3$, $1^4 3^1$ og $\mathrm{sign}(\sigma^{2000}) = 1$.
5. 143.
6. Benyt at en undergruppes orden er divisor i gruppens orden.
7. 1999.
8. $1000\mathbb{N}$.
9. Benyt Noethers 1. Isomorfisætning.
10. Vis konkret at den eneste kommutative gruppe der opfylder kravene er den cykliske.
11. 30.
12. $f(x)$ er reducibel i $\mathbb{R}[X]$.
13. $f(x)$ er irreducibel i $\mathbb{Q}[X]$.
14. Benyt vinket.
15. (1872, 704).

Sommer 2000

1. $|[2]_{693}| = 30$.
2. $\sigma\tau = (1\,2\,3\,4\,5)(6\,7\,8\,9)$, $\tau\sigma = (1\,2\,3\,4\,6)(5\,7\,8\,9)$, $\tau\sigma\tau^{-1} = (1\,2\,3\,4\,6\,7)$, $|\sigma\tau| = |\tau\sigma| = 20$, $|\tau\sigma\tau^{-1}| = 6$ og $\mathrm{sign}(\sigma\tau) = \mathrm{sign}(\tau\sigma) = \mathrm{sign}(\tau\sigma\tau^{-1}) = -1$.
3. Betragt de mulige cykeltyper.
4. Benyt at nogle af grupperne er kommutative, og betragt elementordener for at vise resten.
5. Vis og benyt vinket ved at vise at $n \mid \varphi(1)$ for alle naturlige tal n.
6. Sylow-2-undergrupper har orden 64, Sylow-3-undergrupper har orden 81, Sylow-5-undergrupper har orden 5 og Sylow-7-undergrupper har orden 7.
7. Benyt Sylows sætninger.
8. $C_3 \times C_3 \times C_7 \times C_7 \times C_{11}$, $C_3 \times C_3 \times C_{11} \times C_{49}$, $C_7 \times C_7 \times C_9 \times C_{11}$ og $C_9 \times C_{11} \times C_{49}$.
9. 192.700.
10. Benyt RNG (6.14).
11. Benyt RNG (6.14).

12. $380 = -19(1+i)^4(2+i)(2-i)$.
13. $f(x)$ er reducibel i $\mathbb{R}[X]$.
14. $f(x)$ er irreducibel i $\mathbb{Q}[X]$.
15. $f(x)$ er reducibel i $\mathbb{F}_3[X]$.

Vinter 2000-01

1. Benyt at $(\mathbb{Z}/189)^* \simeq (\mathbb{Z}/7)^* \times (\mathbb{Z}/27)^*$.
2. $\rho\sigma = (1\,2\,3\,4\,5)$, $\sigma\tau = (3\,4\,5\,6\,7)$, $\tau\rho = (1\,2\,3)(5\,6\,7)$, $|\rho\sigma| = |\sigma\tau| = 5$, $|\tau\rho| = 3$ og $\mathrm{sign}(\rho\sigma) = \mathrm{sign}(\sigma\tau) = \mathrm{sign}(\tau\rho) = 1$.
3. $\sigma^{665} = (1\,6\,5\,4\,3\,2)$.
4. $1^6 2^3$.
5. Vis at D_6 og A_4 ikke er isomorfe ved at betragte elementordener.
6. Benyt at en frembringer for C_6 afbildes på enten 1 eller -1.
7. Sylow-2-undergrupper har orden 8 og Sylow-3-undergrupper har orden 3.
8. Bestem ordenerne af Sylow-p-undergrupperne i S_p og S_{2p-1}.
9. Vis konkret at den eneste kommutative gruppe der opfylder kravet er den cykliske.
10. 252.375.
11. 3, 7, 11 og $8+3i$ er primelementer, og $2 = -i(1+i)^2$, $5 = (2+i)(2-i)$ og $13 = (2+3i)(2-3i)$.
12. $31 = (7+3\sqrt{2})(7-3\sqrt{2})$.
13. $x^6 - 26$ er irreducibel i $\mathbb{Q}[X]$.
14. Vis at $f(x)$ ikke har rødder i $\mathbb{F}_3$.
15. $g(x) = f(x)(x^3 + x^2 + 2x + 1)$.

Sommer 2001

1. Benyt at $(\mathbb{Z}/44)^* \simeq (\mathbb{Z}/4)^* \times (\mathbb{Z}/11)^*$.
2. $\sigma = (1\,2\,4\,5\,3)$, $|\sigma| = 5$, og $\mathrm{sign}(\sigma) = 1$.
3. 5^1 og $\mathrm{sign}(\tau) = 1$.
4. 2 i C_{60}, 8 i $\mathrm{A}_4 \times \mathrm{C}_5$, 2 i D_{30} og 2 i $\mathrm{D}_3 \times \mathrm{D}_5$.
5. Benyt at $\mathbb{Q}$ ikke er cyklisk.
6. $\mathrm{C}_2 \times \mathrm{C}_2 \times \mathrm{C}_2 \times \mathrm{C}_7$, $\mathrm{C}_2 \times \mathrm{C}_4 \times \mathrm{C}_7$ og $\mathrm{C}_7 \times \mathrm{C}_8$.
7. Benyt Sylows sætninger.
8. Sylow-2-undergrupper har orden 16, Sylow-3-undergrupper har orden 9 og Sylow-5-undergrupper har orden 5.
9. 352.
10. $4+3\tau$, $5+4\tau$ og $6+5\tau$.
11. Benyt RNG (6.14).
12. $4 = (1+\sqrt{-3})(1-\sqrt{-3})$.
13. x^2+1 er reducibel i $\mathbb{C}[X]$ og irreducibel i $\mathbb{R}[X]$.
14. Vis at $g(x)$ ikke har rødder i $\mathbb{Q}$.
15. Vis at både $f(x)$ og $g(x)$ har rødder i $\mathbb{F}_3$.

Vinter 2001-02

1. $|[11]_{630}| = 6$.
2. $\sigma_2\sigma_3 = (2\,3)$, $\sigma_2\sigma_3\sigma_4 = (1\,3\,4)$, $|\sigma_2\sigma_3| = 2$, $|\sigma_2\sigma_3\sigma_4| = 3$, $\mathrm{sign}(\sigma_2\sigma_3) = -1$ og $\mathrm{sign}(\sigma_2\sigma_3\sigma_4) = 1$.
3. 1, 2, 3, 4, 5 og 6.
4. 1^{10}, $1^8 2^1$, $1^6 2^2$, $1^6 4^1$, $1^4 2^3$, $1^4 2^1 4^1$, $1^2 2^4$, $1^2 2^2 4^1$, $1^2 4^2$, 2^5, $2^3 4^1$ og $2^1 4^2$.
5. $S_3 \simeq D_3$ og $C_5 \times C_6 \simeq C_5 \times C_2 \times C_3 \simeq C_3 \times C_{10}$.
6. Fx fordi $D_{12} \times C_5$ har 13 elementer af orden 2 og S_4 har 9.
7. $p > 2$.
8. Af de to abelske grupper af orden 234 er der kun én, der har et element af orden 18 (eller af orden 9).
9. $(5^8 + 4{\cdot}5^1 + 2{\cdot}5^2 + 1{\cdot}5^4 + 4{\cdot}5^4 + 4 \cdot 5^5)/16$ (= 25.395).
10. Brug, at $N(1 + y\tau) = 1 + y - y^2$. Fx fås $N(1 + a\tau) = \pm 1$ fx for $a = 0, 1, -1, 2$. Fx, for $b = -2, 3$ er $N(1 + b\tau) = -5 = \pm$primtal, så $1 - 2\tau$ og $1 + 3\tau$ er primelementer; tilsvarende med $b = -3, 4$, og $-4, 5$, og $-5, 6$, og $-6, 7$. Fx, for $c = -7, 8$ er $N(1 + c\tau) = -55 = -5{\cdot}11$, så $1 - 7\tau$ og $1 + 8\tau$ er hverken en enhed eller et primelement.
11. $73 = (1 + 3\sqrt{-8})(1 - 3\sqrt{-8})$.
12. 3 og 7.
13. Undersøg om polynomierne har rødder i $\mathbb{F}_5$.
14. $g(x)$ er reducibel i $\mathbb{R}[X]$.
15. $g(x)$ er reducibel i $\mathbb{F}_2[X]$.

Sommer 2002

1. $|[31]_{210}| = 6$.
2. $\sigma = (1\,2\,3)(4\,5\,6\,7)(8\,9)$, $|\sigma| = 12$ og $\mathrm{sign}(\sigma) = 1$.
3. Fx $\sigma = (1\,2\,3\,4\,5)(6\,7\,8\,9)$, $\tau = (1\,2)(3\,4\,5)(6\ \ 7\,8\,9\,10)$ eller $\tau = (1\,2\,3)(4\,5\,6\ \ 7\,8\,9\,10)$.
4. 1, 2, 3, 4, 6, 7, 12, 14, 21, 28, 42 og 84.
5. Betragt elementordener. Fx: G har 8 elementer af orden 3 og H har 2.
6. G abelsk med $|G|=140 = 4{\cdot}5{\cdot}7$ giver $G = C_2 \times C_2 \times C_5 \times C_7$ eller $G = C_4 \times C_5 \times C_7$, og den første er udelukket, idet $|g| = 20$ medfører, at G har et element af orden 4.
7. Hvis φ var injektiv, ville $60 \leqslant 30$.
8. Sylow-11-undergruppen er normal, thi modulo 11 er $2 \equiv 2$, $7 \equiv 7$, $13 \equiv 2$, $2{\cdot}7 \equiv 3$, $2{\cdot}13 \equiv 4$, $7{\cdot}13 \equiv 3$, $2{\cdot}7{\cdot}13 \equiv 6$.
9. Eisenstein anvendt på en vilkårlig af primdivisorerne (2, 7, 11, 13) i 2002.
10. $X^{2002} + 2002$ er reducibel i $\mathbb{R}[X]$.
11. $X^{1936} - 1936 = (X^{968} - 44)(X^{968} + 44)$ er reducibel i $\mathbb{Q}[X]$.
12. $D(\xi) = -8$ og $N(x + y\xi) = x^2 + 2y^2$.
13. $13 + 10\xi = (1 - 2\xi)(-3 + 4\xi)$.
14. $1 + \xi$ og $1 + 3\xi$.
15. $N(21 + 6\xi) = 513$ og $21 + 6\xi = (1 + \xi)(1 - \xi)^2(1 + 3\xi)$.

Vinter 2002-03

1. $|[4]_7| = 3$, $|[4]_{11}| = 5$, $|[4]_{13}| = 6$ og $|[4]_{1001}| = 30$.
2. $\sigma = (1\,2\,4\,5\,3)$, $|\sigma| = 5$ og $\mathrm{sign}(\sigma) = 1$.
3. Med $\sigma = (1\,2\,3\,4\,5)$ og $\tau = (2\,3\,4\,5\,6\,7)$ er $|\sigma\tau| = 12$. $|\mu| = 30$ er udelukket i S_9.
4. $\varphi([x]) = [x/123]$.
5. Fx fordi $\frac{1}{2}\psi(1) \notin \psi(\mathbb{Z})$ (når ψ er ikke-triviel).
6. $g^* = (\mathrm{id}, -\mathrm{id})$.
7. Fx fordi G men ikke H har et element af orden 2 i centret.
8. Sylow-2003-undergruppen er normal.
9. $X^{2002} - 2025 = (X^{1001} - 45)(X^{1001} + 45)$ er reducibel i $\mathbb{Q}[X]$.
10. $X^{2002} - 2003$ er reducibel i $\mathbb{R}[X]$.
11. $X^{2002} - 2003$ er irreducibel i $\mathbb{Z}[X]$.
12. $\mathrm{D}(\xi) = -3$ og $\mathrm{N}(x + y\xi) = x^2 - xy + y^2$.
13. ξ og $1 + \xi$ er enheder.
14. $1 - \xi$ og $1 + 3\xi$ er primelementer.
15. $\mathrm{N}(4 + 5\xi) = 21$, $4 + 5\xi = (1 - \xi)(1 + 3\xi)$.

Sommer 2003

1. 30.
2. $\sigma = (0\,1)(2\,3\,4\,5\,6)(7\,8\,9)$, type $= 2^1 3^1 5^1$, orden $= 30$ og fortegn $= -1$.
3. 15.
4. Cykeltyperne: $1^4 2^1$, $1^2 2^2$ og 2^3. Antallet $= 15 + 45 + 15 + 1 = 76$.
5. Ja, $\sigma = (1\,2)(3\,4)$ eller $(1\,4)(2\,3)$; ja, $\sigma = (1\,3)$ eller $(2\,4)$; og nej.
6. $\mathrm{C}_8 \times \mathrm{C}_2 \times \mathrm{C}_5$ og $\mathrm{C}_4 \times \mathrm{C}_4 \times \mathrm{C}_5$.
7. Fx fire af følgende: $\mathrm{Q}_8 \times \mathrm{C}_{15}$ (1), $\mathrm{D}_4 \times \mathrm{C}_{15}$ (5), $\mathrm{A}_4 \times \mathrm{C}_{10}$ eller $\mathrm{D}_3 \times \mathrm{C}_{20}$ (7), $\mathrm{S}_4 \times \mathrm{C}_5$ (9), $\mathrm{D}_5 \times \mathrm{C}_{12}$ (11), $\mathrm{D}_{12} \times \mathrm{C}_5$ (13), $\mathrm{D}_6 \times \mathrm{C}_{10}$ (15), $\mathrm{D}_{20} \times \mathrm{C}_3$ (21), $\mathrm{D}_{10} \times \mathrm{C}_6$ eller $\mathrm{A}_4 \times \mathrm{D}_5$ (23), S_5 (25), $\mathrm{A}_5 \times \mathrm{C}_2$ eller $\mathrm{D}_{15} \times \mathrm{C}_4$ (31), $\mathrm{D}_6 \times \mathrm{D}_5 = \mathrm{D}_{10} \times \mathrm{D}_3$ (47), D_{60} (61), $\mathrm{D}_{30} \times \mathrm{C}_2$ (63), ...
8. En Sylow-7-undergruppe er normal; ikke tilsvarende for Sylow-19-undergrupperne.
9. Homomorfien kan angives som $z \mapsto z^3$, idet elementerne i C_{15} og C_{10} er komplekse tal; eller som $\zeta_{15}^i \mapsto \zeta_{10}^{2i}$ (kan alternativt angives additivt: $i \pmod{15} \mapsto 2i \pmod{10}$); eller som $(x, y) \mapsto (x, 1)$ under identifikationen $\mathrm{C}_{15} = \mathrm{C}_5 \times \mathrm{C}_3$ og $\mathrm{C}_{10} = \mathrm{C}_5 \times \mathrm{C}_2$); eller som $\mathrm{C}_{15} \to \mathrm{C}_{15} / \mathrm{C}_3 = \mathrm{C}_5 \to \mathrm{C}_{10}$ under de naturlige inklusioner $C_3 \subset C_{15}$ og $C_5 \subset C_{10}$.
10. $(2p)^{-1}\big(2^p + (p-1)\cdot 2 + p \cdot 2^{(p+1)/2}\big)$.
11. $2002 = -i(1+i)^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot (3+2i)(3-2i)$ og 2003 er et primelement. Antallene er 192 (eller 48 bortset fra associering) og 8 (eller 2 bortset fra associering).
12. 2 i $\mathbb{R}$, 2002 i $\mathbb{C}$, 2002 i $\mathbb{F}_{2003}$ og 14 i $\mathbb{F}_{29}$.
13. f er reducibel i $\mathbb{R}[X]$.
14. f er irreducibel i $\mathbb{Q}[X]$.
15. $f = (X^2 - 44)(X^2 + 44)$ er reducibel i $\mathbb{F}_{2003}[X]$.

Vinter 2003/04

1. 55.
2. 12.
3. (0)(1 2 4 8)(3 6 12 9)(5 10)(7 14 13 11). Type $1^1 2^1 4^3$. Orden 4. Fortegn 1.
4. $2^1 6^1$, $2^1 3^1 6^1$, $2^2 3^1$, $2^2 3^2$, $2^4 3^1$.
5. Benyt, at γ og γ^{-1} er konjugerede, fordi de har samme cykeltype, ...
6. $C_2 \times C_3 \times C_{27}$ og $C_2 \times C_9 \times C_9$.
7. Fx fire af: A_5, $A_4 \times C_5$, $D_{30} = D_{15} \times C_2$, $D_{10} \times C_3$, $D_6 \times C_5 = D_3 \times C_{10}$, $D_3 \times D_5$.
8. Benyt Sylow's sætninger, ...
9. 24.
10. Ordenen af billedet er 2. Med sign: $S_4 \to C_2$ er $S_4 \to C_2 \hookrightarrow C_{10}$ et eksempel.
11. $(2^9 + 6{\cdot}2 + 2{\cdot}2^3 + 9{\cdot}2^5)/18 = 46$.
12. $5 = (2+i)(2-i), 5+i = (1+i)(3-2i), 5+2i =$ primelement, $5+3i = (1+i)(4-i)$.
13. f er reducibel i $\mathbb{R}[X]$.
14. f er irreducibel i $\mathbb{Q}[X]$.
15. $f = X^6 + 1$ i $\mathbb{F}_{13}[X]$, og f er reducibel, idet fx 2 er rod.

Sommer 2004

1. 166.
2. (0 3 8 9 6 10 2)(1 4)(5 7); $2^2 7^1$; orden 14, sign = 1.
3. (1 4 2 5 3), (1 4 3 2 5), (1 4)(2 5)(3), (1 5)(2 4 3), (1 5 3)(2 4), (1 5 2 4)(3). De første tre er de lige af dem.
4. —
5. Der er 6 abelske grupper af orden 72, – med 56, 24, 14, 8, 6, og 2 elementer af orden 6.
6. $\varphi(16) = 8$, så $|(\mathbb{Z}/16)^*| = 8$, svarende til restklasserne af 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15. Kvadraterne er 1, 9, 9, 1, 1, 9, 9, 1, specielt 3 elementer af orden 2. Det udelukker C_8 og $C_2 \times C_2 \times C_2$, tilbage bliver muligheden $(\mathbb{Z}/16)^* = C_4 \times C_2$.
7. $S_2 \times S_3 \subset S_5$, bestående af de permutationer, der stabiliserer $\{1, 2\}$ og $\{3, 4, 5\}$; den har orden 12. Banen består af alle 2-element-delmængder $\{a, b\}$.
8. $\#\mathrm{Syl}_7 = 1$, da 11, 13 og $11{\cdot}13$ er udelukket. Tilsvarende: $\#\mathrm{Syl}_{11} = 1, \#\mathrm{Syl}_{13} = 1$. Derfor er G produktet af sine Sylow-undergrupper, og dermed $G = C_7 \times C_{11} \times C_{13} = C_{1001}$.
9. Sæt $H := \{\sigma^i \tau^j\}$. Brug $\sigma\tau = \tau\sigma$: Først, da $\sigma^i \tau^j \sigma^k \tau^l = \sigma^{i+k} \tau^{j+l}$, er H stabil. Videre er $e = \sigma^0 \tau^0 \in H$. Og for $h = \sigma^i \tau^j$ er $h^{-1} = \sigma^{-i} \tau^{-j} \in H$.

Tilsvarende udgør produkter af potenser af 3 disjunkte 5-cykler en undergruppe af orden $5^3 = 125$, isomorf med $C_5 \times C_5 \times C_5$. Tallet 5 forekommer 3 gange i primopløsningen af 15!, så undergruppen er en Sylow-5-undergruppe af S_{15}. Da Sylow-5-undergrupperne parvis er konjugerede, er de specielt alle isomorfe med den fundne.

10. $|G| = 2^2{\cdot}3{\cdot}5$ giver mulighederne 1, 4, 10; der er 1 i C_{60}, og 4 i $C_5 \times A_4$, og 10 i A_5.
11. $\frac{1}{8}(3^8 + 2 \cdot 3^2 + 1{\cdot}3^4 + 2{\cdot}3^5 + 2{\cdot}3^5) = 954$.
12. $(53 - 12\sqrt{11})/(3 - 2\sqrt{11}) = 3 - 2\sqrt{11}$, og $(3 - 2\sqrt{11})/(4 - \sqrt{11}) = -2 - \sqrt{11}$, så $(53 - 12\sqrt{11}) = (4 - \sqrt{11})^2(-2 - \sqrt{11})^2$ [også $= (7 + 2\sqrt{11})^2(13 - 4\sqrt{11})^2$].

13. Nej.
14. Ja, anvend Eisenstein på $f(X+1) = X^4 + 4X^3 + 18X^2 + 28X + 22$ med $p = 2$.
15. $(X-a)(X+a)(X-3/a)(X+3/a) = (X^2-a^2)(X^2-9/a^2) = X^4-(a^2+9/a^2)X^2+9$, og altså $= f(X)$ netop når $a^2 + 9/a^2 = -12$, dvs netop når $f(a) = 0$.

Vinter 2004–05

1. 1600; 400.
2. (1 3)(2 4 5 6 8)(7 9); $2^2 5^1$; 10; 1; (2 8 6 5 4).
3. 176.
4. $1^2 4^1$, $2^1 4^1$.
5. 16.
6. $C_{125} \times C_{31}$, $C_{25} \times C_5 \times C_{31}$, $C_5 \times C_5 \times C_5 \times C_{31}$.
7. 167^{12}.
8. —
9. —
10. f er reducibel i $\mathbb{R}[X]$.
11. f er irreducible i $\mathbb{Q}[X]$.
12. #rødder $= 10$.
13. 700.
14. 430.
15. $4^6 = 4096$.