

Matematik 2AL, sommeren 1996

1. Angiv 3 ikke-isomorfe grupper af orden 260.
2. Gør rede for, at diedergruppen D_6 ikke er isomorf med en undergruppe af den symmetriske gruppe S_4 .

I de næste tre spørgsmål betragtes polynomiet $f(x) = x^3 + 3x^2 + 6x + 24$.

3. Afgør, om $f(x)$ er irreducibel som polynomium i ringen $\mathbb{R}[x]$.
4. Afgør, om $f(x)$ er irreducibel som polynomium i ringen $\mathbb{Q}[x]$.
5. Afgør, om $f(x)$ er irreducibel som polynomium i ringen $\mathbb{Z}_5[x]$, hvor \mathbb{Z}_5 er restklasseringen modulo 5 og koefficienterne i $f(x)$ fortolkes som restklasser i \mathbb{Z}_5 .

I de næste 5 spørgsmål betragtes den symmetriske gruppe S_6 . En permutation kaldes en *dobbeltransposition*, hvis den er et produkt af 2 disjunkte transpositioner. Med σ og τ betegnes følgende to cykler i S_6 :

$$\sigma = (2\ 3\ 4\ 5\ 6) \quad \text{og} \quad \tau = (1\ 2\ 3).$$

6. Udregn produkterne $\sigma\tau$ og $\tau\sigma$, og angiv ordenerne af disse to permutationer.
7. Vis ved et eksempel, at et produkt af to 3-cykler kan være en dobbeltransposition.
8. Bestem antallet af dobbeltranspositioner i S_6 .
9. Gør rede for, at den mindste normale undergruppe af S_6 som indeholder τ er den alternerende gruppe A_6 .
10. Bestem antallet af permutationer i S_6 som er konjugerede med σ . Angiv dernæst samtlige permutationer μ i centralisatoren for σ , dvs de permutationer μ i S_6 , for hvilke $\mu\sigma = \sigma\mu$.
11. Vis, at en gruppe af orden 260 ikke kan være simpel.
12. Skriv tallet 50 som et produkt af irreducible elementer i Gauss' talring $\mathbb{Z}[i]$.
13. Hvor mange forskellige perlekæder med 7 perler kan der laves, når der er tre farver perler at vælge imellem?

I de sidste 2 spørgsmål betragtes polynomierne $f(x) = x^5 + x^3 + 1$ og $g(x) = x^2 + x + 1$ i ringen $\mathbb{Z}_2[x]$.

14. Bestem resten af $f(x)$ ved division med $g(x)$, dvs angiv det polynomium $r(x)$ af grad mindre end 2, som indgår i en fremstilling $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$ i $\mathbb{Z}_2[x]$.
15. Polynomiet $g(x)$ er det eneste irreducible andengradspolynomium i $\mathbb{Z}_2[x]$ [Dette kræves ikke bevist]. Vis, at polynomiet $f(x)$ er irreducibelt i $\mathbb{Z}_2[x]$.

Matematik 2AL, vinteren 1996-97

1. Angiv 4 ikke-isomorfe grupper af orden 140.
2. Vis, at diedergruppen D_4 indeholder to ikke-isomorfe undergrupper af orden 4.

I de næste tre spørgsmål betragtes polynomiet $f(x) = x^3 + 12x^2 + 18$.

3. Afgør, om $f(x)$ er irreducibel som polynomium i ringen $\mathbb{R}[x]$.
4. Afgør, om $f(x)$ er irreducibel som polynomium i ringen $\mathbb{Q}[x]$.
5. Afgør, om $f(x)$ er irreducibel som polynomium i ringen $\mathbb{Z}_5[x]$, hvor \mathbb{Z}_5 er restklasseringen modulo 5 og koefficienterne i $f(x)$ fortolkes som restklasser i \mathbb{Z}_5 .

I de næste 5 spørgsmål betragtes den symmetriske gruppe S_7 . En permutation kaldes en *dobbeltransposition*, hvis den er et produkt af 2 disjunkte transpositioner. Med σ og τ betegnes følgende to cykler i S_7 :

$$\sigma = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6) \quad \text{og} \quad \tau = (5\ 6\ 7).$$

6. Udregn produkterne $\sigma\tau$ og $\tau\sigma$, og angiv ordenerne af disse to permutationer.
7. Vis, at enhver permutation $\mu \neq \text{id}$ i A_7 , som opfylder $\mu^2 = \text{id}$, er en dobbeltransposition.
8. Bestem antallet af dobbeltranspositioner i S_7 .
9. Hvilke af tallene $1, 2, \dots, 15$ er ikke orden af et element i S_7 ?
10. Bestem antallet af permutationer i S_7 som er konjugerede med σ . Angiv dernæst samtlige permutationer μ i centralisatoren for σ , dvs de permutationer μ i S_7 , for hvilke $\mu\sigma = \sigma\mu$.
11. Vis, at en gruppe af orden 140 ikke kan være simpel.
12. Hvilke af tallene $1 + i, 1 + 2i, 1 + 3i, 1 + 4i$, og $1 + 5i$ er irreducible i Gauss' talring $\mathbb{Z}[i]$. Angiv primopløsninger i $\mathbb{Z}[i]$ for de reducible af tallene.
13. Hvor mange forskellige perlekæder med 6 perler kan der laves, når der er tre farver perler at vælge imellem?
14. Betragt polynomiet $g(x) = x^2 + x + 1$ i ringen $\mathbb{Z}_2[x]$. Vis, at $g(x)$ er et irreducibelt polynomium, og vis, at $g(x)$ er det eneste irreducible polynomium af grad 2.
15. Angiv samtlige irreducible polynomier af grad 4 i $\mathbb{Z}_2[x]$.

Matematik 2AL, sommeren 1997

1. Permutationen σ i S_6 er et produkt af fire 3-cykler,

$$\sigma = (4\ 5\ 6)(3\ 4\ 5)(2\ 3\ 4)(1\ 2\ 3).$$

Bestem fortegnet for σ . Angiv fremstillingen af σ som produkt af disjunkte cykler.

2. En permutation μ i S_{10} har typen $4^1 6^1$. Hvilken type har μ^3 ?
3. Vis, at hvis en kommutativ gruppe af orden 120 har præcis ét element af orden 2, så er gruppen cyklisk.
4. For en endelig gruppe G og $n \in \mathbb{N}$ betegnes med $\alpha_n(G)$ antallet af elementer i G , hvis orden er divisor i n . Vis, at hvis G er et direkte produkt, $G = G_1 \times G_2$, så er $\alpha_n(G) = \alpha_n(G_1)\alpha_n(G_2)$.
5. Angiv antallet af elementer af orden 2 i hver af følgende grupper: C_{60} , A_5 , $A_4 \times C_5$, D_{30} , $D_3 \times D_5$.
6. Vis, at den cykliske gruppe C_4 er isomorf med en undergruppe af diedergruppen D_n , hvis og kun hvis n er delelig med 4.
7. Produktmængden $X := \{0, 1\}^4$ af 4-sæt (x_1, x_2, x_3, x_4) med $x_i \in \{0, 1\}$ kan opfattes som mængden af afbildninger $\{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{0, 1\}$. Følgelig virker S_4 på X . Beskriv isotropigrupperne for denne virkning.
8. Et kvadratisk mosaik-vindue opbygges ved at sammensætte $4 \times 4 = 16$ små farvede glaskvadrater. Hvor mange forskellige vinduer kan der bygges, når der er 3 farver glas at vælge imellem? Det er nok at opstille et regneudtryk for antallet.
9. Lad S_1 og S_2 være grupper af orden 2^v og lad H_1 og H_2 være grupper af ulige orden. Vis, at hvis $S_1 \times H_1$ og $S_2 \times H_2$ er isomorfe, så er S_1 og S_2 isomorfe.
10. Vis, at en gruppe af orden 880 ikke kan være simpel.
11. Bestem, i polynomiumsringen $\mathbb{F}_3[X]$, antallet af irreducible polynomier af grad 2.
- I de næste tre spørgsmål betragtes polynomiet $f = X^5 + 21X + 63$.
12. Afgør, om f er irreducibel som polynomium i ringen $\mathbb{R}[X]$.
13. Afgør, om f er irreducibel som polynomium i ringen $\mathbb{Q}[X]$.
14. Afgør, om f er irreducibel som polynomium i ringen $\mathbb{F}_2[X]$, hvor $\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2$ og koefficienterne i f fortolkes som restklasser modulo 2.
15. Angiv, i Gauss' talring $\mathbb{Z}[i]$, primopløsningen af tallet $11 + 2i$.

Matematik 2AL, vinteren 1997–98

1. Bestem et helt tal a således, at $a \equiv 5 \pmod{8}$ og $a \equiv 2 \pmod{9}$. Hvilken orden, i gruppen $(\mathbb{Z}/72)^*$, har restklassen af a modulo 72?
2. I den symmetriske gruppe S_9 betragtes permutationen,

$$\sigma = ((1\ 2\ 3\ 4\ 5)(5\ 6\ 7\ 8\ 9))^3.$$

Bestem fortegnet for σ . Angiv typen af σ .

3. Angiv i gruppen A_7 et element af hver af de forekommende ordener.
4. Hvor mange permutationer i S_8 har typen $2^1 3^2$?
5. Vis, at følgende grupper parvis er ikke-isomorfe: C_{12} , $C_6 \times C_2$, A_4 , $D_3 \times C_2$.
6. Vis, at Klein's Vier-gruppe V er isomorf med en undergruppe af diedergruppen D_n , hvis og kun hvis n er lige.
7. Vis, at hvis en kommutativ gruppe af orden 120 har et element af orden 24, så er gruppen cyklisk.
8. Talrummet \mathbb{R}^4 kan opfattes som mængden af afbildninger $\{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \mathbb{R}$. Følgelig virker S_4 på \mathbb{R}^4 . Bestem isotropigruppen for vektoren $(1, 1, 0, 0)$. Angiv en vektor, hvis isotropigruppe har orden 2.
9. Vis, at en gruppe af orden $5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 17$ ikke kan være simpel.
10. Et kvadratisk mosaik-vindue opbygges ved at sammensætte $5 \times 5 = 25$ små farvede glaskvadrater. Hvor mange forskellige vinduer kan der bygges, når der er 3 farver glas at vælge imellem? Det er nok at opstille et regneudtryk for antallet.
11. Vis, at netop ét af polynomierne $X^{12} - 8$, $X^{12} - 9$ og $X^{12} - 10$ er irreducibelt i $\mathbb{Q}[X]$.
12. Angiv i $\mathbb{F}_2[X]$ et polynomium, som er reducibelt og uden rødder i \mathbb{F}_2 .
13. Bestem i polynomiumsringen $\mathbb{F}_5[X]$ antallet af normerede irreducible polynomier af grad 2.
14. Afgør, i den kvadratiske talring $\mathbb{Z}[\sqrt{-7}]$, hvilke af tallene $1 \pm 6\sqrt{-7}$, der har $2 + \sqrt{-7}$ som divisor. Hvilke divisorer har $2 + \sqrt{-7}$?
15. For hvilke tal $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ har ligningen $x^2 + y^2 = n!$ heltalsløsninger (x, y) ?

Matematik 2AL, sommeren 1998

1. Bestem et helt tal a således, at $a \equiv 1 \pmod{4}$, $a \equiv 2 \pmod{5}$ og $a \equiv 5 \pmod{9}$. Hvilken orden, i gruppen $(\mathbb{Z}/180)^*$, har restklassen af a modulo 180.
 2. Om en gruppe G vides, at afbildningen $x \mapsto x^2$ er en homomorfi $G \rightarrow G$. Vis, at G er abelsk.
 3. Vis, at der ved $x \mapsto 3x + 5$ defineres en permutation af mængden $\mathbb{Z}/10$. Angiv, idet tallene $0, 1, \dots, 9$ identificeres med deres restklasser modulo 10, cykelfremstillingen af denne permutation. Bestem permutationens orden og fortegn.
 4. Bestem for den symmetriske gruppe S_6 antallet af elementer af orden 6.
 5. Bestem det mindste naturlige tal n for hvilket A_n indeholder et element af orden 30.
 6. Lad G være en gruppe af orden 60, og lad $a(G)$ betegne antallet af elementer i G af orden 5. Vis, at $a(G)$ er 4 eller 24, og vis, at begge muligheder kan forekomme.
 7. Gør rede for, at en gruppe af orden $992 = 31 \cdot 32$ ikke kan være simpel.
 8. En gruppe af orden 120 indeholder 8 elementer af orden 6. Vis, at gruppen ikke er kommutativ.
 9. Hvor mange perlekæder med 8 perler kan der laves, når der er to farver perler at vælge imellem.
 10. Hvor mange karusseller med 8 heste kan der laves, når der er to farver (træ-)heste at vælge imellem.
 11. Lad L være et legeme med 2^v elementer. Vis, at L har karakteristisk 2, og beskriv strukturen af L 's additive gruppe.
- I de næste tre spørgsmål betragtes polynomiet $f = X^{16} + 12$.
12. Afgør, om f er irreducibel som polynomium i ringen $\mathbb{R}[X]$.
 13. Afgør, om f er irreducibel som polynomium i ringen $\mathbb{Q}[X]$.
 14. Afgør, idet koefficienterne i f identificeres med deres restklasser modulo 17, om f har en rod i \mathbb{F}_{17} .
 15. Hvor mange elementer i Gauss's talring $\mathbb{Z}[i]$ er divisorer i 150.

Matematik 2AL, vinteren 1998–99

1. Bestem et helt tal a således, at $a \equiv 3 \pmod{4}$ og $a \equiv 6 \pmod{25}$. Hvilken orden, i gruppen $(\mathbb{Z}/100)^*$, har restklassen af a modulo 100.
 2. Lad G være en endelig kommutativ gruppe. Vis, at afbildningen $x \mapsto x^2$, af G ind i G , er bijektiv, hvis og kun hvis G er af ulige orden.
 3. Vis, at der ved $x \mapsto 7x + 2$ defineres en permutation af mængden $\mathbb{Z}/10$. Angiv, idet tallene $0, 1, \dots, 9$ identificeres med deres restklasser modulo 10, cykelfremstillingen af denne permutation. Bestem permutationens orden og fortegn.
 4. Bestem for den symmetriske gruppe A_8 antallet af elementer af orden 2.
 5. Bestem det mindste naturlige tal n for hvilket A_n indeholder et element af orden 1998. [Vink: $1998 = 2 \cdot 3^3 \cdot 37$.]
 6. Lad G være en gruppe af orden 120. Vis, at antallet af elementer i G af orden 5 er enten 4 eller 24, og vis, at begge muligheder kan forekomme.
 7. Antag, at tallet $2^v - 1$ er et primtal. Gør rede for, at en gruppe af orden $2^v(2^v - 1)$ ikke kan være simpel.
 8. Bestem en værdi af n således, at der er præcis 6 kommutative grupper af orden n .
 9. Hvor mange karusseller med 10 heste kan der laves, når der er to farver (træ-)heste at vælge imellem.
 10. Lad L være et legeme med 27 elementer. Vis, at L har karakteristik 3 og at L 's additive gruppe er isomorf med $\mathbb{Z}/3 \times \mathbb{Z}/3 \times \mathbb{Z}/3$.
- I de næste tre spørgsmål betragtes polynomiet $f = X^4 + 100X^3 + 100X + 50$.
11. Afgør, om f er irreducibel som polynomium i ringen $\mathbb{R}[X]$.
 12. Afgør, om f er irreducibel som polynomium i ringen $\mathbb{Q}[X]$.
 13. Vis, idet koefficienterne i f identificeres med deres restklasser modulo 3, at i $\mathbb{F}_3[X]$ er $X^2 + 1$ divisor i f .
 14. Vis, at tallet $16 + 15i$ har en norm, der er delelig med 13. Angiv, i Gauss's talring $\mathbb{Z}[i]$, en primopløsning af $16 + 15i$.
 15. Hvor mange elementer i Gauss's talring $\mathbb{Z}[i]$ er divisorer i 1998.

Matematik 2AL, sommeren 1999

1. Bestem i gruppen $(\mathbb{Z}/385)^*$ ordenen af restklassen af 2.
 2. Bestem potensen σ^{1999} af permutationen $\sigma = (1\ 2)(7\ 6)(2\ 3)(5\ 6)(3\ 4)$ i S_7 .
 3. Vis, at der ved $x \mapsto x^3 + 3$ defineres en permutation af mængden $\mathbb{Z}/10$. Angiv, idet tallene $0, 1, \dots, 9$ identificeres med deres restklasser modulo 10, cykelfremstillingen af denne permutation. Bestem permutationens type, orden og fortegn.
 4. Vis, at der findes en undergruppe af orden 15 i S_8 . Findes der en undergruppe af orden 15 i S_7 ?
 5. Bestem antallet af permutationer af type 2^3 i S_7 og i A_8 .
 6. Lad d være en ulige divisor i n . Vis, at diedergruppen D_n har præcis én undergruppe af orden d .
 7. Betragt i en gruppe G to forskellige elementer a og b af orden 2. Vis, at ab har orden 2, hvis og kun hvis a og b kommuterer.
 8. Lad p være et primtal. Bestem antallet af ikke-trivielle undergrupper af gruppen $C_p \times C_p$.
 9. Vis, at Sylow-3-undergrupperne i S_6 er isomorfe med $C_3 \times C_3$.
 10. Overfladen på badebolde, af perfekt kugleform, er delt i 10 lige store områder via en ækvator og 5 længdekredse (som på en globus), der deler ækvator i 5 lige store dele. Hvert område kan være farvet rødt eller hvidt. Hvor mange badebolde findes der?
- I de næste fire opgaver betragtes polynomiet $f = X^4 + 1$.
11. Vis, at enhedsroden $\zeta = e^{2\pi i/8} = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{i}{2}\sqrt{2}$ er rod i f .
 12. Afgør, om f er irreducibel som polynomium i ringen $\mathbb{R}[X]$.
 13. Afgør, om f er irreducibel som polynomium i ringen $\mathbb{Q}[X]$.
 14. Bestem, idet koefficienterne i f identificeres med deres restklasser modulo 5, primopløsningen af f i $\mathbb{F}_5[X]$.
 15. Vis, at normen af tallet $12 + 5\sqrt{-7}$ er delelig med 11. Bestem i talringen $\mathbb{Z}[\sqrt{-7}]$ en irreducibel opløsning af $12 + 5\sqrt{-7}$.

Matematik 2AL, vinteren 1999–2000

NB. Det kræves ikke godtgjort i besvarelsen, at 1999 er et primtal.

1. Vis, at restklassen af 2 modulo 1999 er invertibel, og angiv den inverse restklasse.
 2. Bestem i gruppen $(\mathbb{Z}/495)^*$ ordenen af restklassen af 2.
 3. Vis, at for hvert helt tal a har kongruensen $x^3 \equiv a \pmod{10}$ en, og modulo 10 kun én, løsning x .
 4. Angiv, idet $\sigma = (1\ 2)(7\ 6)(2\ 3)(5\ 6)(3\ 4)$ i S_7 , orden, cykeltype og fortegn for permutationen σ^{2000} .
 5. Bestem det mindste naturlige tal n for hvilket den alternerende gruppe A_n indeholder et element af orden 2000.
 6. Vis, at hvis den symmetriske gruppe S_n indeholder en undergruppe af orden 2000, så er $n \geq 15$. Vis, at S_{23} indeholder en kommutativ undergruppe af orden 2000.
 7. Hvilken orden har Sylow-1999-undergruppen i S_{2000} .
 8. For hvilke værdier af n indeholder diedergruppen D_n en undergruppe af orden 2000.
 9. Lad H være en undergruppe af den symmetriske gruppe S_n . Vis, at enten er $H \subseteq A_n$ eller også indeholder H det samme antal lige og ulige permutationer.
 10. En kommutativ gruppe G af orden 2000 har præcis et element af orden 2 og præcis 4 elementer af orden 5. Vis, at G må være cyklisk.
 11. Hvor mange forskellige perlekæder med 8 perler kan der laves, når der er 2 farver perler at vælge mellem.
- I de næste tre opgaver betragtes polynomiet $f = X^{2000} - 1000X^2 - 50$.
12. Afgør, om f er irreducibel som polynomium i ringen $\mathbb{R}[X]$.
 13. Afgør, om f er irreducibel som polynomium i ringen $\mathbb{Q}[X]$.
 14. Vis, idet koefficienterne i f identificeres med deres restklasser modulo 1999, at f har præcis 2 rødder i \mathbb{F}_{1999} . [Vink: brug for eksempel Fermat's lille sætning til at vise, for $x \in \mathbb{Z}$, at $2f(x) \equiv x^2 - 100 \pmod{1999}$.]
 15. Bestem for $k = 2000$ en løsning $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ til ligningen $x^2 + y^2 = k^2$ således, at 5 ikke går op i x .

Matematik 2AL, sommeren 2000

1. Bestem i gruppen $(\mathbb{Z}/693)^*$ ordenen af restklassen af 2. (Vink: $693 = 3^2 \cdot 7 \cdot 11$.)
 2. Betragt cyklerne $\sigma = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)$ og $\tau = (5\ 6\ 7\ 8\ 9)$ i S_9 . Udregn cykelfremstillinger, ordener og fortegn af $\sigma\tau$, $\tau\sigma$ og $\tau\sigma\tau^{-1}$.
 3. Vis at den symmetriske gruppe S_9 indeholder elementer af orden 14 og 20, men ingen elementer af orden 21.
 4. Vis at følgende grupper er parvis ikke-isomorfe: S_4 , C_{24} , $C_4 \times C_6$, $A_4 \times C_2$.
 5. Vis at hvis φ er en gruppehomomorfi fra $(\mathbb{Q}, +)$ til $(\mathbb{Z}, +)$, så er φ triviel, dvs. $\varphi(q) = 0$ for alle $q \in \mathbb{Q}$. (Vink: Start med at vise $\varphi(1) = 0$.)
 6. For hvilke primtal p findes en ikke-triviel Sylow- p -undergruppe i den alternerende gruppe A_9 , og hvilke ordener har de ikke-trivielle Sylow- p -undergrupper?
 7. Vis at en gruppe af orden 135 ikke kan være simpel.
 8. Angiv de kommutative grupper af orden $4851 = 3^2 \cdot 7^2 \cdot 11$.
 9. Hvor mange perlekæder med 11 perler kan der laves, når der er 4 farver perler at vælge imellem? Det er nok at opstille et regneudtryk for antallet.
 10. Vis at primtallet 5 er irreducibelt som element i den kvadratiske talring $\mathbb{Z}[\sqrt{-11}]$. Er 5 et primelement i $\mathbb{Z}[\sqrt{-11}]$? Er $\mathbb{Z}[\sqrt{-11}]$ UFD?
 11. Vis at $77 + 55\sqrt{2}$ er et primelement i ringen $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.
 12. Angiv i Gauss' talring $\mathbb{Z}[i]$ primopløsningen af tallet 380.
- I de sidste tre spørgsmål betragtes polynomiet $f = X^5 + 38X^2 - 19$.
13. Afgør om f er irreducibel som polynomium i ringen $\mathbb{R}[X]$.
 14. Afgør om f er irreducibel som polynomium i ringen $\mathbb{Q}[X]$.
 15. Afgør, idet koefficienterne i f identificeres med deres restklasser modulo 3, om f er irreducibel i ringen $\mathbb{F}_3[X]$.

Matematik 2AL, vinteren 2000–2001

1. Vis at gruppen $(\mathbb{Z}/189)^*$ indeholder mindst tre elementer af orden 6.
2. Betragt cyklerne $\rho = (1\ 2\ 3)$ og $\sigma = (3\ 4\ 5)$ og $\tau = (5\ 6\ 7)$ i S_7 . Udregn cykelfremstillinger, ordener og fortegn af $\rho\sigma$ og $\sigma\tau$ og $\tau\rho$.
3. Bestem potensen σ^{665} af permutationen $\sigma = (3\ 4)(2\ 4)(4\ 6)(4\ 5)(1\ 6)$ i S_6 .
4. En permutation μ i S_{12} har typen $3^2 6^1$. Hvilken type har μ^3 ?
5. Vis at grupperne $D_6 \times C_2$ og $A_4 \times C_2$ ikke er isomorfe.
6. Vis at der er netop to forskellige gruppehomomorfier fra C_6 til C_2 .
7. Angiv ordenerne af de ikke-trivielle Sylow- p -undergrupper i D_{12} .
8. Lad p være et primtal. Vis at Sylow- p -undergrupperne i S_p er isomorfe med Sylow- p -undergrupperne i S_{2p-1} .
9. Vis at hvis en kommutativ gruppe af orden 220 har et element af orden 4, så er den cyklisk.
10. Et kvadratisk mosaik-vindue opbygges ved at sammensætte $3 \times 3 = 9$ lige store farvede glaskvadrater. Hvor mange forskellige vinduer kan der bygges, når der er 5 farver glas at vælge imellem? Det er nok at opsille et regneudtryk for antallet.
11. Angiv i Gauss' talring $\mathbb{Z}[i]$ primopløsninger af tallene 2, 3, 5, 7, 11, 13, og $8 + 3i$.
12. Angiv i talringen $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ en primopløsning af tallet 31.
13. Vis at netop to af polynomierne $X^6 - 25$, $X^6 - 26$, og $X^6 - 27$ er reducible i polynomiumsringen $\mathbb{Q}[X]$.
14. Vis at polynomiet $f = X^3 - X + 1$ er irreducibelt i polynomiumsringen $\mathbb{F}_3[X]$.
15. Angiv en primopløsning af polynomiet $g = X^6 + X^5 + X^4 + X^3 - X^2 + X + 1$ i polynomiumsringen $\mathbb{F}_3[X]$. [Vink: brug opgave 14.]

Matematik 2AL, sommeren 2001

1. Vis at gruppen $(\mathbb{Z}/44)^*$ har et element af orden 5.
2. I den symmetriske gruppe S_5 betragtes permutationen

$$\sigma = (1\ 2)(1\ 2\ 3)(1\ 2\ 3\ 4)(1\ 2\ 3\ 4\ 5).$$

Udregn cykelfremstilling, orden og fortegn af σ .

3. I den symmetriske gruppe S_5 betragtes en permutation τ som opfylder $\tau \neq e$ og $\tau^5 = e$, hvor e er det neutrale element i S_5 . Udregn cykeltype og fortegn af τ .
 4. Angiv antallet af elementer af orden 3 i hver af følgende grupper: C_{60} , $A_4 \times C_5$, D_{30} og $D_3 \times D_5$.
 5. Lad $(G, +)$ være en cyklisk gruppe og lad φ være en gruppehomomorfi fra $(G, +)$ til $(\mathbb{Q}, +)$. Vis at φ ikke kan være surjektiv.
 6. Angiv de kommutative grupper af orden 56. Lad dernæst G være en gruppe af orden 56 som har netop 48 elementer af orden 7. Vis at G ikke er kommutativ.
 7. Lad G være en gruppe af orden 56 og lad $a(G)$ betegne antallet af elementer i G af orden 7. Vis at $a(G)$ er 6 eller 48.
 8. Angiv ordenerne af de ikke-trivielle Sylow- p -undergrupper i $A_4 \times A_5$.
 9. Hvor mange karusseller med 12 heste kan der laves når der er 2 farver heste at vælge imellem? Det er nok at opstille et regneudtryk for antallet.
 10. Betragt den kvadratiske talring $\mathbb{Z}[\tau]$ hvor $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ er rod i $X^2 - X - 1$. Afgør hvilke af tallene $4 + 3\tau$, $5 + 4\tau$, $6 + 5\tau$ og $7 + 6\tau$ der er primelementer i $\mathbb{Z}[\tau]$, idet det må benyttes uden bevis at $\mathbb{Z}[\tau]$ er et UFD.
 11. Vis at $119 + 84\sqrt{2}$ ikke er et primelement i den kvadratiske talring $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$. Er $119 + 84\sqrt{2}$ et irreducibelt element i $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$?
 12. Bestem en irreducibel opløsning af tallet 4 i den kvadratiske talring $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$.
 13. Afgør om $X^2 + 1$ er irreducibelt som polynomium i ringen $\mathbb{C}[X]$, og om det er irreducibelt som polynomium i ringen $\mathbb{R}[X]$.
- I de sidste to spørgsmål betragtes polynomierne $f = X^4 + 3X + 3$ og $g = X^2 + X + 1$.
14. Vis at f og g er irreducible som polynomier i ringen $\mathbb{Q}[X]$.
 15. Vis, idet koefficienterne i f og g identificeres med deres restklasser modulo 3, at f og g ikke er irreducible som polynomier i ringen $\mathbb{F}_3[X]$.

Matematik 2AL, vinteren 2001–2002

1. Bestem i gruppen $(\mathbb{Z}/630)^*$ ordenen af restklassen af 11. (Vink: $630 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$.)
 2. I den symmetriske gruppe S_4 betragtes permutationerne $\sigma_2 = (1\ 2)$, $\sigma_3 = (1\ 2\ 3)$ og $\sigma_4 = (1\ 2\ 3\ 4)$. Udregn cykelfremstillinger, ordener og fortegn af $\sigma_2\sigma_3$ og $\sigma_2\sigma_3\sigma_4$.
 3. Bestem de mulige ordener af elementer i den symmetriske gruppe S_6 .
 4. I den symmetriske gruppe S_{10} betragtes en permutation τ som opfylder $\tau^4 = e$, hvor e er det neutrale element i S_{10} . Hvilke muligheder er der for cykeltypen af τ ?
 5. Vis at grupperne $D_3 \times C_5 \times C_6$ og $S_3 \times C_3 \times C_{10}$ er isomorfe.
 6. Vis at grupperne $D_{12} \times C_5$ og $S_4 \times C_5$ ikke er isomorfe.
 7. Bestem for hvilke primtal p det gælder at Sylow- p -undergrupperne i S_p er isomorfe med Sylow- p -undergrupperne i D_p .
 8. Vis at hvis en kommutativ gruppe af orden 234 har et element af orden 18, så er den cyklisk. (Vink: $234 = 2 \cdot 3^2 \cdot 13$.)
 9. Hvor mange perlekæder med 8 perler kan der laves når der er 5 farver perler at vælge imellem? Det er nok at opstille et regneudtryk for antallet.
 10. Betragt den kvadratiske talring $\mathbb{Z}[\tau]$ hvor $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ er rod i $X^2 - X - 1$. Vis at der findes heltal a , b og c så $1 + a\tau$ er invertibel i $\mathbb{Z}[\tau]$ og så $1 + b\tau$ er et primelement i $\mathbb{Z}[\tau]$, men så $1 + c\tau$ hverken er invertibel eller et primelement i $\mathbb{Z}[\tau]$. Det må benyttes uden bevis at $\mathbb{Z}[\tau]$ er et UFD.
 11. Bestem en irreducibel opløsning af tallet 73 i den kvadratiske talring $\mathbb{Z}[\sqrt{-8}]$.
 12. Afgør hvilke af primtallene 2, 3, 5, 7 og 11 der er primelementer i den kvadratiske talring $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$.
 13. Afgør for hvert element α i \mathbb{F}_5 om polynomiet $f_\alpha = X^3 + X^2 + \alpha$ er irreducibelt i ringen $\mathbb{F}_5[X]$.
- I de sidste to spørgsmål betragtes polynomiet $g = X^4 + X^2 + 1$.
14. Afgør om g er irreducibel som polynomium i ringen $\mathbb{R}[X]$.
 15. Afgør, idet koefficienterne i g identificeres med deres restklasser modulo 2, om g er irreducibel som polynomium i ringen $\mathbb{F}_2[X]$.

Matematik 2AL, sommeren 2002

Det er tilladt at skrive med blyant og benytte viskelæder, så længe skriften er læselig, og udviskninger foretages grundigt. Overstregning trækker *ikke* ned og anbefales ved større ændringer.

1. Angiv en gruppeisomorfi $\psi: (\mathbb{Z}/210)^* \xrightarrow{\cong} (\mathbb{Z}/7)^* \times (\mathbb{Z}/30)^*$. Bestem ordenen af elementet $[31]_{210}$ i $(\mathbb{Z}/210)^*$.
2. Bestem cykelfremstillingen af $\sigma = (1234)(34567)(89) \in S_9$ samt $|\sigma|$ og $\text{sign}(\sigma)$.
3. Bestem $\sigma \in S_{10}$, så $|\sigma| = 20$, samt $\tau \in S_{10}$, så $|\tau| > 20$.
4. Bestem samtlige elementordener i gruppen $C_2 \times C_3 \times C_4 \times C_7$.
5. Afgør, om grupperne $G = A_4 \times D_5$ og $H = S_3 \times D_{10}$ er isomorfe.
6. Antag, at G er en kommutativ gruppe med $|G| = 140$, samt at der findes $g \in G$ med $|g| = 20$. Bevis, at G er cyklisk. (Udnyt, at $140 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7$.)
7. Lad $\varphi: A_5 \rightarrow C_{30}$ være en vilkårlig gruppehomomorfi. Begrund, at φ ikke kan være injektiv. Bevis, at φ er trivielt, dvs. $\varphi(\sigma) = 1$ for alle $\sigma \in A_5$. (Udnyt, at kernen for φ er en normal undergruppe af A_5 .)
8. Lad G være en gruppe af orden 2002. Begrund, at G ikke er simpel. (Udnyt faktoriseringen $2002 = 2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$ til at bestemme antallet af Sylow-11-undergrupper.)
9. Begrund, at $X^{2002} + 2002$ er irreducibelt i $\mathbb{Z}[X]$. (Udnyt, at $2002 = 2 \cdot 1001$.)
10. Afgør, om $X^{2002} + 2002$ er irreducibelt i $\mathbb{R}[X]$.
11. Afgør, om $X^{1936} - 1936$ er irreducibelt i $\mathbb{Q}[X]$.

I de sidste fire opgaver betragtes den kvadratiske talring $\mathbb{Z}[\xi]$ med $\xi \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{-2}$. Det oplyses, at $\mathbb{Z}[\xi]$ er UFD (og dette ønskes ikke uddybet).

12. Bestem diskriminanten $D(\xi)$. Bestem normen $N(x + y\xi)$, når $x, y \in \mathbb{Z}$.
13. Afgør, om $1 - 2\xi$ er divisor i $13 + 10\xi$ inden for $\mathbb{Z}[\xi]$.
14. Afgør hvilke af elementerne $1 + \xi$, 3 , $1 + 3\xi$ og $8 + 3\xi$, der er primelementer i $\mathbb{Z}[\xi]$.
15. Bestem normen $N(21 + 6\xi)$ samt primopløsningen af $21 + 6\xi$ inden for $\mathbb{Z}[\xi]$.

Matematik 2AL, vinteren 2002–03

Det er tilladt at skrive med blyant og benytte viskelæder, så længe skriften er læselig, og udviskninger foretages grundigt. Overstregning trækker *ikke* ned og anbefales ved større ændringer.

1. Bestem ordenen af elementet $[4]_n$ i den multiplikative gruppe $(\mathbb{Z}/n)^*$ for $n \in \{7, 11, 13\}$. Bestem endvidere ordenen af $[4]_{1001}$ i $(\mathbb{Z}/1001)^*$. ($1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$.)
2. Bestem cykelfremstilling, orden og fortegn for $\sigma = (12)(123)(1234)(12345) \in S_5$.
3. Antag, at $\sigma, \tau \in S_9$ har $|\sigma| = 5$, og $|\tau| = 6$. Afgør, om $|\sigma\tau| = 12$ kan forekomme. Afgør, om $|\sigma\tau| = 30$ kan forekomme.
4. Betragt de additive kvotientgrupper $\mathbb{Z}/123$ og \mathbb{Q}/\mathbb{Z} . Bestem en *injektiv* gruppehomomorfi $\varphi: \mathbb{Z}/123 \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.
5. Lad $\psi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ være en gruppehomomorfi. Begrund, at ψ ikke er surjektiv.
6. Bestem i gruppen $G \stackrel{\text{Def}}{=} D_3 \times D_6$ et element g^* , som ikke er det neutrale element, således at g^* kommuterer med alle elementer, dvs. $g^*g = gg^*$ for alle $g \in G$.
7. Bevis, at grupperne $G = D_3 \times D_6$ og $H = A_4 \times D_3$ ikke er isomorfe. (Udnyt resultatet i opgave 6.)
8. Begrund, at gruppen G ikke er simpel, hvis $|G| = 6009$. (2003 er et primtal!)
9. Afgør, om $X^{2002} - 2025$ er irreducibelt i $\mathbb{Q}[X]$.
10. Afgør, om $X^{2002} - 2003$ er irreducibelt i $\mathbb{R}[X]$.
11. Afgør, om $X^{2002} - 2003$ er irreducibelt i $\mathbb{Z}[X]$.

I de sidste fire opgaver betragtes den kvadratiske talring $\mathbb{Z}[\xi]$ med $\xi \stackrel{\text{Def}}{=} -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{-3}}{2}$, som er rod i $X^2 + X + 1 \in \mathbb{Z}[X]$. Ringen $\mathbb{Z}[\xi]$ er UFD (og dette ønskes ikke uddybet).

12. Bestem diskriminanten $D(\xi)$. Bestem normen $N(x + y\xi)$, når $x, y \in \mathbb{Z}$.
13. Afgør hvilke af elementerne ξ , $1 + \xi$ og $1 - \xi$, der er enheder i $\mathbb{Z}[\xi]$.
14. Afgør hvilke af elementerne $1 - \xi$, 3 og $1 + 3\xi$, der er primelementer i $\mathbb{Z}[\xi]$.
15. Bestem normen $N(4 + 5\xi)$ samt primopløsningen af $4 + 5\xi$ inden for $\mathbb{Z}[\xi]$.

Matematik 2AL, sommeren 2003

I besvarelsen må benyttes, at $22176 = 288 \cdot 7 \cdot 11$, at $2002 = 2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$, og at 2003 er et primtal.

1. Bestem i gruppen $(\mathbb{Z}/22176)^*$ ordenen af restklassen af 17.
 2. Bestem cykeltype, orden og fortegn for permutationen $(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)(1\ 7\ 6)(1\ 8\ 9)(1\ 0\ 7)$; det er en permutation af de 10 cifre $0, 1, \dots, 9$.
 3. Bestem den største mulige orden af en permutation i den alternerende gruppe A_9 .
 4. Bestem de mulige cykeltyper for permutationer af orden 2 i S_6 . Hvor mange permutationer σ i S_6 opfylder, at $\sigma^2 = \text{id}$?
 5. Betragt 4-cyklen $\gamma = (1\ 2\ 3\ 4)$ i S_4 . Findes der en lige permutation σ i S_4 således, at $\sigma\gamma\sigma^{-1} = \gamma^3$? Findes der en ulige permutation σ i S_4 således, at $\sigma\gamma\sigma^{-1} = \gamma^3$? Findes der en permutation σ i S_4 således, at $\sigma\gamma\sigma^{-1} = \gamma^2$?
 6. Angiv de kommutative grupper, der har orden 80 og præcis 3 elementer af orden 2.
 7. Bestem 4 ikke-kommutative grupper af orden 120, for hvilke antallene af elementer af orden 2 er forskellige.
 8. Vis, at en gruppe G af orden $7^3 \cdot 19^3$ ikke kan være simpel.
 9. Lad $\varphi: C_{15} \rightarrow C_{10}$ være en ikke-triviel gruppehomomorfi. Vis, at kernen for φ har orden 3, og at billedet for φ har orden 5. Vis, at der findes en sådan homomorfi.
 10. Lad p være et ulige primtal. Hvor mange perlekæder med p perler kan der laves, når der er 2 farver perler at vælge mellem?
 11. Bestem i Gauss' talring $\mathbb{Z}[i]$ primopløsninger af tallene 2002 og 2003. Angiv for hvert af disse to tal antallet af divisorer.
 12. Hver koefficient i polynomiet $f = X^{2002} - 1$ er 0, 1 eller -1 , og f kan opfattes som polynomium i $L[X]$ for et vilkårligt legeme L . Hvor mange rødder har polynomiet i L , når (a) $L = \mathbb{R}$, (b) $L = \mathbb{C}$, (c) $L = \mathbb{F}_{2003}$, (d) $L = \mathbb{F}_{29}$?
- I de næste tre opgaver betragtes polynomiet $f = X^4 + 67$.
13. Afgør, om f er irreducibel i $\mathbb{R}[X]$.
 14. Afgør, om f er irreducibel i $\mathbb{Q}[X]$.
 15. Afgør, idet koefficienterne i f identificeres med deres restklasser modulo 2003, om f er irreducibel i $\mathbb{F}_{2003}[X]$. [Vink: $2003 - 67$ er et kvadrattal.]

Matematik 2AL, vinteren 2003–04

I besvarelsen kan det være nyttigt at vide, at $63457 = 31 \cdot 2047$, at $2^{11} = 2048$, at 2003 er et primtal, og at $2002 = 2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$.

1. Bestem i gruppen $(\mathbb{Z}/63457)^*$ ordenen af restklassen af 2.
 2. Hvor mange elementer i $(\mathbb{Z}/2003)^*$ har orden 13?
 3. Idet de 15 tal $0, 1, \dots, 14$ identificeres med deres restklasser modulo 15, bestemmes en permutation af disse tal ved forskriften $x \mapsto 2x \pmod{15}$. Bestem cykelfremstilling, type, orden og fortegn for denne permutation.
 4. Angiv cykeltyperne for permutationer af orden 6 i den alternerende gruppe A_{11} .
 5. Lad γ være en given permutation i S_n . Vis, at der altid findes permutationer $\sigma \in S_n$, som opfylder ligningen $\sigma \gamma \sigma^{-1} = \gamma^{-1}$. Vis, at når σ opfylder ligningen, så vil også $\sigma \gamma$ opfylde ligningen. Vis, at når γ er en ulige permutation, så er ligningen altid opfyldt med en lige permutation σ .
 6. Angiv de kommutative grupper, der har orden 162 og indeholder præcis 8 elementer af orden 3.
 7. Bestem 4 ikke-kommutative grupper af orden 60, for hvilke antallene af elementer af orden 2 er forskellige.
 8. Vis, at en gruppe af orden $3^3 \cdot 13$ ikke kan være simpel.
 9. Om en gruppe G vides, at $|G| = 60$ og at G er simpel. Bestem antallet af elementer af orden 5 i G .
 10. Lad $\varphi: S_4 \rightarrow C_{10}$ være en ikke-triviell gruppehomomorfi. Vis, at billedet for φ har orden 2 og at kernen for φ har orden 12. Vis, at der findes en sådan homomorfi.
 11. Hvor mange perlekæder med 9 perler kan der laves, når der er 2 farver perler at vælge mellem?
 12. Bestem i Gauss' talring $\mathbb{Z}[i]$ primopløsninger af tallene $5, 5 + i, 5 + 2i$, og $5 + 3i$.
- I de næste tre opgaver betragtes polynomiet $f = X^6 + 2003$.
13. Afgør, om f er irreducibel i $\mathbb{R}[X]$.
 14. Afgør, om f er irreducibel i $\mathbb{Q}[X]$.
 15. Afgør, idet koefficienterne i f identificeres med deres restklasser modulo 13, om f er irreducibel i $\mathbb{F}_{13}[X]$.