Obligatorisk opgave i Alg2/Mat2AL

Besvarelsen afleveres senest tirsdag den 24/5 kl 13.30. Se yderligere information om afleveringen på næste side.

1. Om en permutation $\sigma \in \mathrm{S}_8$ vides, at $\sigma^3 = (1\,2\,3\,4\,5)$ og at $\sigma^5 = (6\,7\,8)$. Bestem σ. Vis, at σ er lige, og bestem index af $\langle\sigma\rangle$ i A_8.

2. I en kommutativ gruppe af orden 1000 findes 4 elementer af orden 10. Vis, at gruppen er cyklisk. Angiv en kommutativ gruppe af orden 1000, der har 72 elementer af orden 10.

3. Bestem antallet af abelske grupper af orden 864 (på nær isomorfi).

4. Lad $\varphi\colon G \to G'$ være en gruppehomomorfi. Antag, at G er cyklisk. Vis, at billedgruppen $\varphi(G)$ er cyklisk.

5. Lad $\varphi\colon \mathrm{C}_{28} \to \mathrm{A}_5$ være en ikke-triviel homomorfi, og lad d være ordenen af billedet. Vis, at $d \mid 28$. Vis, at $7 \nmid d$. Vis, at $d \neq 4$, og begrund, at $d = 2$. Vis, at der er 15 ikke-trivielle homomorfier $\mathrm{C}_{28} \to \mathrm{A}_5$.

6. Betragt 5-cyklen $\sigma = (2\,3\,4\,5\,6)$ som permutation i S_6. Bestem antallet af permutationer i S_6 som er konjugerede med σ. Angiv dernæst permutationerne i centralisatoren for σ.

7. Vis, at Klein's Vierer-gruppe V er isomorf med en undergruppe af diedergruppen D_n, hvis og kun hvis n er lige.

8. Betragt nedenstående 6 grupper:

$$G_1 := \mathrm{C}_2 \times \mathrm{C}_{10} \times \mathrm{C}_{100}, \quad G_2 := \mathrm{C}_4 \times \mathrm{C}_4 \times \mathrm{C}_{125}, \quad G_3 := \mathrm{C}_4 \times \mathrm{C}_5 \times \mathrm{C}_{100},$$
$$G_4 := \mathrm{C}_4 \times \mathrm{C}_{10} \times \mathrm{C}_{50}, \quad G_5 := \mathrm{C}_4 \times \mathrm{C}_{20} \times \mathrm{C}_{25}, \quad G_6 := \mathrm{C}_4 \times \mathrm{C}_{500}\,.$$

Bestem de par (i, j) med $i < j$ for hvilke grupperne G_i og G_j er isomorfe.

9. Gruppen S_4 virker på talrummet $\mathbb{R}^4$ ved, for vektorer $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$, at permutere de 4 koordinater. Bestem isotropigruppen for vektoren $x = (1, 0, 1, 0)$, og bestem banen gennem x. Angiv en vektor, hvis isotropigruppe har orden 2.

10. Hvor mange perlekæder med 8 perler kan der laves, når der er to farver perler at vælge imellem?

11. Hvor mange karusseller med 8 heste kan der laves, når der er to farver (træ-)heste at vælge imellem?

12. Bestem antallet af grupper af hver af følgende ordener: 358, 359, 361, 365.

13. Antag, at G er en simpel gruppe af orden 660. Bestem antallet af elementer af orden 11 i G.

14. Lad $\varphi\colon \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/8 \to \mathbb{Z}/4$ være en surjektiv gruppehomomorfi. Vis, at kernen, som kommutativ gruppe, er isomorf med $\mathbb{Z}/4$ eller $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$. Vis, at begge muligheder kan forekomme (med passende valg af φ).

15. Antag, at $d \mid n$. Vis, at $[a]_n \mapsto [a]_d$ er en veldefineret homomorfi $(\mathbb{Z}/n)^* \to (\mathbb{Z}/d)^*$. Vis, at homomorfien er surjektiv. Hvor mange primiske restklasser $[a]_{2000}$ modulo 2000 opfylder, at $a \equiv 1 \pmod 5$?

Om den obligatoriske opgave i Algebra 2, 2005.

Omstående opgave er den obligatoriske opgave i kurset Algebra 2, 2005. Godkendelse af denne opgave kræves for at man kan gå til eksamen i Algebra 2 eller Matematik 2AL. For at gå til eksamen i Matematik 2AL kræves *yderligere*, at man har fået godkendt den obligatoriske opgave fra kurset Matematik 2AL-0[1].

Her er en række yderligere informationer om den obligatoriske opgave:

- Besvarelsen skal afleveres senest tirsdag den 24/5 kl 13.30 til instruktoren for det hold, man indskrevet på i UA-systemet; hvis man går til øvelser, skal det være den samme instruktor, man går til øvelser hos.
- Alle 15 spørgsmål skal være besvaret for at opgaven kan godkendes.
- Besvarelsen skal være individuel.
- Besvarelsen skal afleveres på papir.
- På UA-systemet kan man løbende følge med i sin opgaves status.
- Besvarelserne er bedømt senest tirsdag den 31/5 ved øvelsernes begyndelse.
- Hvis man ikke får godkendt sin besvarelse, vil der være mulighed for at *genaflevere* efter følgende procedure:
  - Genaflevering senest kl 10.00 til instruktoren ved øvelserne fredag den 3/6.
  - Bedømmelsen foreligger senest ved øvelserne tirsdag den 7/6.
  - Eventuelle problemer herefter afklares med Anders Thorup.

[1] Kravet er opfyldt, hvis man har fået begge de obligatoriske opgaver i Matematik 2AL godkendt i 2004; i så fald får man godkendelsen overført til 2005 ved henvendelse til Anders Thorup.