

### Ugeseddel 13.

**Program.** Emnerne i den 13. uge, 5/5-9/5, er PID og UFD, og kvadratiske talringe, fra RNG5-6. Ugens øvelser er: RNG3: 1; POL1: 7; POL2: 1, 5, 6; POL3: 4, 6, 11.

De gamle eksamensopgaver kan findes fra hjemmesiden, både fra hver enkelt eksamen og i en samlet udgave. Det er en god ide at regne gamle opgaver, hjemme og ved øvelserne, når der er tid til det. Start med opgaverne fra 1996, og spring dem over, hvor teorien endnu ikke er gennemgået.

I den 12. uge gennemgik jeg konstruktionen af brøklegerne (RNG4, det er kursorisk), og RNG(5.1)-(5.4).

**Nøgleord:** brøklegerne for integritetsområde, brøklegerne  $L(X)$  af rationale funktioner; enhed=invertibelt element, divisor, multiplum, gå op i, associerede elementer, trivielle divisorer, irreducibelt element, primelement.

**Kommentar.** Kapitlet om brøklegerne er kursorisk, men du skal naturligvis vide, at brøkerne  $2/14$  og  $3/21$  er det samme (rationale) tal. Hvis man „kender“ legemet  $\mathbb{R}$ , der omfatter ringen  $\mathbb{Z}$  af hele tal, så kan man *definere rationale tal*, altså *brøker*, som tal af formen  $a/s := as^{-1}$ , hvor  $a, s \in \mathbb{Z}$  og  $s \neq 0$ . Med denne definition er det et resultat, at  $2/14 = 3/21$ . Hvis man ikke „kender“ et legeme, som omfatter ringen  $\mathbb{Z}$ , kan man *konstruere* brøklegerne: Brøker er ækvivalensklasser af par af hele tal  $(a, s)$  med  $s \neq 0$ , og betegnelsen  $a/s$  er en snedig betegnelse for den ækvivalensklasse, der indeholder  $(a, s)$ .

Et springende punkt er naturligvis, hvornår to par er ækvivalente: Af hensyn til generaliseringen til vilkårlige integritetsområder er det bedst at vedtage, at to par  $(a, s)$  og  $(a', s')$  er ækvivalente, når de kan forlænges til det samme par. (For ringen  $\mathbb{Z}$  er det ensbetydende med, at parrene kan forkortes til det samme par, men det er ikke tilfældet for generelle ringe.) Det er således en konsekvens af definitionen, at  $2/14 = 3/21$ : de to par  $(2, 14)$  og  $(3, 21)$  kan forlænges til  $(6, 42)$ .

Faktoriserings-teorien i RNG5 er vores analyse af Aritmetikkens Fundamentalsætning: *Ethvert  $a \neq 0$  har en entydig primopløsning.* Vi præciserer! Vi stiller matematikerens evindelige spørgsmål: hvorfor? – Og vi besvarer det!

#### Kuglerne.

• *Brøklegerne* for et integritetsområde  $R$  består af brøker  $a/s = \frac{a}{s}$ , hvor  $a, s \in R$  og  $s \neq 0$ . To brøker er ens i brøklegerne, når de kan forlænges til den samme brøk. Fx består brøklegerne for polynomiumsringen  $L[X]$  af alle *rationale funktioner*,

$$\frac{a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0}{s_m X^m + \cdots + s_1 X + s_0},$$

med  $s_i \neq 0$  for mindst et  $i$ .

- *Enheder etc.* (i)  $u \in R$  er en *enhed*, hvis der findes  $v \in R$  med  $uv = 1$ .
- (ii)  $a, a' \in R$  er *associerede*, hvis der findes en enhed  $u$  med  $a' = ua$ .
- (iii)  $d \in R$  er *divisor* i  $a \in R$ , hvis  $a = rd$  med passende  $r$ , og  $d$  er *triviel divisor*, hvis  $d$  er en enhed eller  $d$  er associeret med  $a$ .
- (iv)  $q \in R$  er irreducibelt, hvis  $q \notin \{0\} \cup R^*$  og  $q$  kun har trivielle divisorer.

5. maj 2003

(v)  $p \in R$  er et primelement, hvis  $p \notin \{0\} \cup R^*$  og der for alle  $a, b \in R$  gælder, at  $p \mid ab \implies p \mid a \vee p \mid b$ .

• *Øv dig!* „Oversæt“ definitionerne til noget med hovedidealer. Fx er  $u$  en enhed, hvis og kun hvis  $(u) = (1)$ .

**På sigt:** I den 14. uge, 12/5-15/5, er overskriften „Kvadratisk talring; polynomier“, fra RNG6 og POL4-5. Ugens øvelser er: RNG6: 2, 3, 4, 5, 8, **9**, **11**, 13, samt eksamensopgaver, som aftalt på de enkelte øvelseshold.

**Hører det aldrig op?** Én til:

$$\text{TAL(2.12), opgave } \mathbf{8}_1: \sum_{i=0}^n f^{(i)} \mapsto \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} f^{(i)}.$$

Anders Thorup