

### Ugeseddel 11.

**Program.** Den 11. uge, 14/4-25/4, fylder (incl. påskeferien) 14 dage. Der er flere emner: Polynomier; homomorfi og isomorfi; brøklegerne, fra POL2-3 og RNG3-4. Ugens øvelser er GRP8: 10; RNG1: 4, 5, 12, 13; RNG2: 1, 8, 9; POL1: 1, 2, 3, 4, 6.

I den tiende uge afsluttede jeg RNG2 og POL1-2. Køreplanen for den 2. obligatoriske opgave står på ugeseddel 10. Bemærk specielt sidste frist for eventuel genaflevering: for mandagsholdet ved øvelserne den 28/4 og for de øvrige hold ved øvelserne den 30/4.

**Hvornår** er det nu det er? Påskeferien er fra (og med) onsdag før Påske til (og med) tirsdag efter Påske.

**Nøgleord:** Kvotientring, primideal, maksimalideal, karakterisering af maksimal- og primideal; polynomium, koefficient, normeret polynomium, ledende koefficient, konstant polynomium, grad, nul-polynomium, grad af sum og produkt, division med rest (for polynomier), Euklid's algoritme, Hovedidealsætningen for  $L[X]$ .

**Kommentar.** Det beskedne hovedresultat i POL1 er, at et polynomium  $r_0 + r_1 X + \dots + r_n X^n$  blot er listen  $(r_0, r_1, r_2, \dots)$  af sine koefficienter, og at koefficienterne kan tages fra en vilkårlig (kommutativ) ring. Men hvad er  $X$ ? Der er to (lige rigtige) svar. Enten:  $X^i$  er en „pladsholder“, der fortæller, at det element i  $R$ , der står foran, er den  $i$ 'te koefficient. Eller:  $X$  er selv et polynomium, nemlig det specielle polynomium med koefficienter  $(0, 1, 0, 0, \dots)$ .

Sætningen om division med rest for polynomier er i princippet kendt fra gymnasiet. For polynomier med koefficienter i en vilkårlig ring  $R$  antages, at „divisorpolynomiet“  $d$  er normeret,  $d = X^n + \dots$ . For polynomier med koefficienter i  $\mathbb{Q}$  eller  $\mathbb{R}$  (som i gymnasiet) eller mere generelt, med koefficienter i et legeme  $L$ , kan man blot antage, at  $d$  ikke er nulpolynomiet. Det induktive bevis for sætningen er blot en nedskrivning af hvad man faktisk gør, når man dividerer et polynomium op i et andet.

Polynomiumsringen  $L[X]$  med koefficienter i et legeme  $L$  har en række egenskaber fælles med ringen  $\mathbb{Z}$  af hele tal. Det bygger på, at man i begge ringe har en sætningen om division med rest. Fx kan man i begge ringe udføre Euklid's algoritme, og man kan bruge algoritmen til at bestemme den største fælles divisor  $d$  for to elementer  $f, f_1$ . I polynomiumsringen skal „største“ tages i betydningen: „enhver anden fælles divisor er divisor i  $d$ “. Tilsvarende gælder i begge ringe, at hvert ideal er et hovedideal, dvs af formen  $(f)$ .

#### Kuglerne.

- *Karakteriseringer.* For idealer  $\mathfrak{p}$  og  $\mathfrak{m}$  i  $R$  gælder:  $\mathfrak{p}$  er et primideal  $\iff R/\mathfrak{p}$  er et integritetsområde. Og:  $\mathfrak{m}$  er et maksimalideal  $\iff R/\mathfrak{m}$  er et legeme. [Kommentar: „ $\iff$ “ er bandlyst i tekst, men åbenbart ikke i kuglerne!]

- *Korollar.* Ethvert maksimalideal er et primideal.

- *Division med rest i  $R[X]$ .* For et givet normeret „divisorpolynomium“  $d$  kan hvert polynomium  $f$  entydigt skrives  $f = qd + r$ , hvor  $\text{grad}(r) < \text{grad}(d)$ . Når  $R$  er et legeme, gælder konklusionen, når blot  $d \neq 0$ .

- *Hovedidealsætning for  $L[X]$ .* Til hvert ideal  $\mathfrak{A}$  i  $L[X]$  ( $L$  et legeme) findes et polynomium  $f \in L[X]$  så  $\mathfrak{A} = (f)$ .

**På sigt:** I den 12. uge, 28/4-2/5, er overskriften „Brøkring; PID og UFD“ fra RNG4-5. Ugens øvelser er RNG2: 3, 5, 7\*; RNG3: 3, 6; POL2: 3, 4; POL3: 2, 3. UO: 16, 17.

Anders Thorup