Ugeseddel 10.

Program. I den tiende uge, 7/4-11/4, er der to emner: „Ideal og kvotientring" og „Polynomium", fra RNG2 og fra POL1-2. Vi tager hul på kapitlet om polynomier for ydeligere at belyse ringteorien. Ugens øvelser er: **obl 2**; GRP8: 1, 2, 4, 5, 7, 8, 12; RNG1: 1, 2, 3, 6, 16, 18. Det er i denne uge den anden obligatoriske opgave skal ske afleveres: senest fredag den 11/4 kl 12 i instruktorens box (samme instruktor som rettede den første opgave).

Køreplanen er følgende: For mandagsholdet (Hold 1) forventes opgaverne at være rettede allerede mandag den 14/4 (inden påske); frist for eventuel genaflevering er ved øvelserne mandag den 28/4. For de øvrige hold er opgaverne rettet onsdag den 23/4 (efter påske); frist for eventuel genaflevering er ved øvelserne onsdag den 30/4.

I den niende uge gennemgik jeg RNG1 og RNG(2.1)–(2.11).

Nøgleord: Ring, distributiv lov, nul-element, modsat element, et-element, kommutativ ring, stabil delmængde, delring, nul-ringen, talringe, restklasseringe, funktionsringe, matrixringe, karakteristik, primring, nul-reglen, integritetsområde, skævlegeme, legeme, ideal, trivielle idealer, ægte ideal, hovedideal, primideal, maksimalideal, idealer i $\mathbb{Z}$.

Kommentar. Bemærk, at vi kræver, at en ring har et *et-element* 1, som er neutralt element for multiplikation. Man kan naturligvis også studere „ringe uden et-element", og gør man det jævnligt, er det nok dem man vil kaldes ringe; „vores" ringe hedder så *ringe med et-element*.

Eksempler på ringe falder naturligt i 3 klasser: Talringe (og restklasseringene $\mathbb{Z}/n$) optræder i talteori, funktionsringe indgår i analyse og geometri, og matrixringe og andre ikke-kommutative ringe indgår i lineær algebra og repræsentationsteori (herunder i den videregående gruppeteori). Bortset fra definitionen betragter vi kun kommutative ringe.

Nul-reglen gælder for talringe, men ikke for funktionsringe: Antag, at intervallet I er en foreningsmængde, $I = A \cup B$. Hvis $f(t) = 0$ for $t \in A$ og $g(t) = 0$ for $t \in B$, så er produktfunktionen fg lig med nul-funktionen. Eksempler kan konstrueres med $\mathcal{C}^\infty$-funktioner. Ved $f(t) := e^{-1/t}$ for $t > 0$ og $f(t) := 0$ for $t \leqslant 0$ defineres en funtion f i $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Med $g(t) := f(-t)$ gælder $fg = 0$.

Idealer i en ring er specielt undergrupper i ringens additive gruppe, og de er i en vis forstand analoge til normale undergrupper i en gruppe. [Hvis du synes det er for svært at lære at håndskrive de gotiske bogstaver, der bruges i noterne for idealer, må du gerne skrive med dit eget favorit-alfabet.] Hovedidealet (a) frembragt af et element $a \in R$ er analogt med den cykliske undergruppe frembragt af et element i en gruppe.

Det er vigtigt at vide, at i ringen $\mathbb{Z}$ er alle idealer hovedidealer, dvs af formen (n). Kvotientringen $\mathbb{Z}/(n)$ er restklasseringen $\mathbb{Z}/n$. For et primtal p er restklasseringen $\mathbb{Z}/p$ et legeme, som også betegnes $\mathbb{F}_p$. Generelt betegner $\mathbb{F}_q$ et legeme med q elementer; sådan et findes, når q er en potens af et primtal.

Prim- og maksimalidealer i en ring kan i en vis forstand opfattes som generaliseringer af (hovedidealerne frembragt af) primtal. Det var i øvrigt i forsøget på at generalisere Aritmetikkens Fundamentalsætning til visse talringe, at idealer og primidealer blev „opfundet".

Små (endelige) ringe spiller ikke nogen særlig rolle. Her er en liste med nogle af de mindste, af ordener $n = 1, \ldots, 8$:

1	2	3	4	5	6	7	8
0	$\mathbb{F}_2$	$\mathbb{F}_3$	$\mathbb{Z}/4, \mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2, \mathbb{F}_4$, plus én	$\mathbb{F}_5$	$\mathbb{Z}/6$	$\mathbb{F}_7$	$\mathbb{Z}/8, \mathbb{Z}/4 \times \mathbb{Z}/2, \mathbb{F}_8, T_2(\mathbb{F}_2), \ldots$

hvor $T_2(\mathbb{F}_2) \subseteq \mathrm{Mat}_2(\mathbb{F}_2)$ betegner delringen af øvre trekantsmatricer. Det er en ikke-kommutativ ring. Der er mange flere af orden 8.

Vektorrummet $\mathbb{R}^n$ kan organiseres med en multiplikation til et legeme for $n = 1$ (det er blot $\mathbb{R}$ selv) og for $n = 2$ (det er $\mathbb{C}$). Hamilton prøvede længe for $n = 3$, men opdagede så at det kunne gøres for $n = 4$, hvis man droppede den kommutative lov. Det er Hamilton's skævlegeme $\mathbb{H}$ af kvaternioner. Wedderburn beviste, at det *kun* kan gøres for disse værdier af n, altså $n = 1, 2, 4$. Hvis man tillader sig at svække den associative lov, kan det også gøres for $n = 8$.

Det var også Wedderburn, der viste, at et endeligt skævlegeme nødvendigvis er kommutativt.

Kuglerne.
• *Gruppen er produktet*, $G = S_1 \times \cdots \times S_r$, af sine Sylowundergrupper, hvis der for hver primidivsor p_i i G's orden kun findes én Sylow-p_i-undergruppe S_i.

• *Der er kun én ring* med p elementer (hvor p er et primtal), nemlig $\mathbb{Z}/p$, og den er et legeme.

• *Idealerne i* $\mathbb{Z}$ *er netop hovedidealerne* $\mathbb{Z}n$ *for* $n \geqslant 0$. *De er primidealer, hvis og kun hvis* n *er* 0 *eller et primtal, og de er maximalidealer, hvis og kun hvis* n *er et primtal.*

Hvornår var det nu det var? Joseph Henry Maclagen Wedderburn 1882–1948, William Rowan Hamilton 1805–1865.

På sigt: I den 11. uge, 14/4-25/4, er overskriften „Polynomium; homomorfi og isomorfi“ fra POL2-3, RNG3-4 Ugens øvelser er GRP8: **10**; RNG1: **4**, 5, 12, 13; RNG2: 1, 8, 9; POL1: 1, 2, 3, 4, 6.

Anders Thorup