Ugeseddel 9.

Program. I den niende uge, 31/3-4/4, indledes ringteorien med „Ring; ideal og kvotientring“, fra RNG1–2. Måske kan jeg ikke dy mig for at nævne lidt mere om anvendelser af Sylow-undergrupper. Ugens øvelser er GRP5: 25, 27, 28; GRP6: 10*, 11; GRP7: 7, 8, 10, 11*, 12, 15, **16**, 18; GRP8: **3**.

I den ottende uge afsluttede jeg kapitlet om grupper. Bemærk, at afsnittet om Sylow-undergrupper er kursorisk.

Nøgleord: Baneformlen, Konjugering, konjugerede elementer, konjugeretklasser, centralisator, centrum, p-gruppe, Klasseformlen, Burnside's Formel, Polya's Formel, farvelægning, mønstre. Sylow-p-undergruppe, Sylow's sætninger, simpel gruppe.

Kommentar. Sylow's sætninger anvendes bl.a. til at klassificere endelige grupper. Kapitel GRP8 er kursorisk, så ved eksamen kræves ikke kendskab til beviserne (men der kræves kendskab til anvendelserne).

Lad N være en normal undergruppe i G (herfor skrives ofte $N \triangleleft G$), og lad $Q := G/N$ være kvotientgruppen. Gruppen G kan da opfattes som „sammenklistret“ af grupperne N og Q i følgende forstand: Elementerne q i Q er sideklasser modulo N, så for hvert $q \in Q$ kan vi tænke os valgt en repræsentant $s(q)$. Herefter er G den disjunkte forening af sideklasserne $s(q)N$, og hvert element $g \in G$ kan altså skrive $g = s(q)n$, med entydigt bestemte $q \in Q$, $n \in N$. Som mængde kan vi altså identificere: $G = Q \times N$. Sammenklistringen består i hvordan multiplikationen i G er bestemt ud fra multiplikationen i N og i Q.

Hvis G ikke er simpel, har G en ikke-triviel normal undergruppe N, og G kan „nedbrydes“ til N og Q. Hvis N og/eller Q ikke er simple kan de yderligere nedbrydes. I denne løse forstand kan en endelig gruppe opfattes som opbygget af simple grupper: Der findes en „kæde“ af normale undergrupper,

$$\{1\} = N_0 \triangleleft N_1 \triangleleft N_2 \triangleleft \cdots \triangleleft N_r = G,$$

hvor de successive kvotienter N_i/N_{i-1} er simple grupper. For de symmetriske grupper S_n for $n = 2, 3, 4$ får vi kæderne,

$$\underbrace{\{1\} \triangleleft \mathrm{S}_2}_{\mathrm{C}_2}, \quad \underbrace{\{1\} \triangleleft \mathrm{A}_3}_{\mathrm{C}_3} \underbrace{\triangleleft\, \mathrm{S}_3}_{\mathrm{C}_2}, \quad \underbrace{\{1\} \triangleleft \mathrm{C}_2}_{\mathrm{C}_2} \underbrace{\triangleleft\, \mathrm{V}}_{\mathrm{C}_2} \underbrace{\triangleleft\, \mathrm{A}_4}_{\mathrm{C}_3} \underbrace{\triangleleft\, \mathrm{S}_4}_{\mathrm{C}_2},$$

hvor de successive kvotienter, som antydet, er cykliske af ordener 2 og 3. Det er faktisk eksistensen af disse kæder, hvis successive kvotienter er cykliske grupper, der sikrer, at rødderne i polynomier af grad $n = 2, 3, 4$ kan udtrykkes ved kvadrat- og kubikrødder af udtryk i polynomiets koefficienter. Det er dybtliggende, at det tilsvarende resultat *ikke* gælder for polynomier af grad $n \geqslant 5$ (Abel's sætning); det bygger afgørende på, at A_n så er en simpel gruppe.

Kuglerne.

• *Tælleformlen.* $|X| = |X^G| + \sum_j |G : G_{x_j}|$, hvor der et valgt ét element x_j i hver bane med mere end 1 element.

• *Klasseformlen.* $|G| = |\,\mathrm{Cent}(G)| + \sum'_j |G : C(x_j)|$, hvor der et valgt ét element x_j i hver konjugeretklasse uden for centret.

• *Burnside's formel.* #(baner)= $|X/G| = |G|^{-1} \sum_g |X^g|$.

• *Polya's formel.* #(mønstre)= $|\mathcal{F}/G| = |G|^{-1} \sum_g |F|^{m_g}$, hvor m_g er antallet af cykler i permutationen g_X, dvs permutationen af X bestemt ved g. Her er X en endelig mængde (af pladser), F en endelig mængde (af farver), og mængden $\mathcal{F} = F^X$, af afbildninger $\varphi\colon X \to F$, opfattes som mængden af farvninger af pladserne.

• *Sylow-p-undergrupper*, hvor p er et primtal, er undergrupper, hvis orden er den størst mulige potens af p, går op i gruppens orden.

• *Sylow's sætninger*. Lad Syl_p være mængden af Sylow-p-undergrupper af en given gruppe G. Da gælder: (1) $\mathrm{Syl}_p \neq \emptyset$. (2) Hvis $S', S \in \mathrm{Syl}_p$, så findes $g \in G$ så $S' = gSg^{-1}$. (3) Antallet $|\mathrm{Syl}_p|$ er $\equiv 1 \pmod p$ og divisor i $|G|$. (4) $|\mathrm{Syl}_p| = 1$, hvis og kun hvis en af Sylow-p-undergrupperne er normal.

Påstand (4) er en let konsekvens af de øvrige.

• *Smågrupper.* Sylow's sætninger er vigtige redskaber i klassifikationen af endelige grupper. Du kan fx udvide din helt egen liste over smågrupper ved at bruge følgende (p og q er primtal):

(1) Hvis $|G| = qp$ med $q < p$ og $p \not\equiv 1 \pmod q$, så er $G = \mathrm{C}_{qp}$.
(2) Hvis $|G| = 2p$, så er enten $G = \mathrm{C}_{2p}$ eller $G = \mathrm{D}_p$.
(3) Hvis $|G| = p^2$, så er enten $G = \mathrm{C}_{p^2}$ eller $G = \mathrm{C}_p \times \mathrm{C}_p$.

(Det sidste har naturligvis intet med Sylow's sætninger at gøre!)

Hvornår var det nu det var? William Burnside 1852–1927, George Pólya 1887–1985, Peter Ludwig Mejdell Sylow 1832–1918.

På sigt: I den tiende uge, 7/4-11/4, er overskriften „Ideal og kvotientring; polynomium", fra RNG2, og POL1-2. Ugens øvelser er: **obl 2**; GRP8: 1, 2, 4, 5, 7, 8, 12; RNG1: 1, 2, 3, 6, 16, 18; aflevering af den anden obligatoriske opgave skal ske senest fredag den 11/4 kl 12 i instruktorens box.

Anders Thorup