Ugeseddel 8.

Program. I den ottende uge, 24/3-28/3, afslutter vi "gruppers virkning", og gennemgår Sylow's sætninger, GRP7-8. Sylow's sætninger er kursorisk stof. Ugens øvelser er GRP5: 9, 15, **23**, 24; GRP6: 1, 5, **6**; GRP7: 1, 3, 4, 5; UO: 10*, 11, 12*, 13.

I den syvende uge gennemgik jeg GRP(7.1)–(7.14).

Nøgleord: Virkning af gruppe G på mængde X, repræsentation $G \to \mathrm{Perm}(X)$, triviel virkning, invariant (eller stabil) delmængde, restriktion af virkning, virkning på F^X, translation, Cayley's Sætning, G-ækvivalens, bane $G.x$, banelængde, banerum X/G, fixpunktsmængde X^g, isotropigruppe G_x, hexaedergruppen.

Kommentar. Ups!, så var der pludselig igen mange nøgleord. Når gruppen G virker på X, flytter elementerne $g \in G$ rundt på punkterne i X: til hvert g hører en permutation af X. Specielt kan gruppen G virke på sig selv ($X := G$) ved translation: gruppeelementet g flytter gruppeelementet x hen i gruppeelementet gx. Hvert $g \in G$ giver således en permutation af G. Cayley viste, at gruppen G herved kan opfattes som en undergruppe af gruppen af alle permutationer af G. Det var iøvrigt Cayley, der indførte den abstrakte gruppeteori, i modsætning til den mere konkrete teori for permutationsgrupper, der var betragtet tidligere.

Gruppers virkning blev demonstreret med en lang række eksempler. Når gruppen G virker på mængden X, deles X i baner bestående af G-ækvivalente elementer. Det er vigtigt at forstå anvendelsen på mønstre: Her fortolkes X som en mængde af pladser. For en given mængde F (af farver) fortolkes afbildninger $\varphi \colon X \to F$ som *farvelægninger* af X, idet værdien $\varphi(x) \in F$ fortæller, hvilken farve der er lagt på pladsen x. Gruppen G virker på mængden F^X af farvelægninger, idet $g.\varphi$ er den farvelægning, der bestemmes ved, at farven på pladsen x flyttes hen på pladsen $g.x$, altså ved ligningen $(g.\varphi)(g.x) = \varphi(x)$. Banerne, der også kaldes *mønstre*, består af farvelægninger, der i en vis forstand er ens. Det er vigtigt at kunne bestemme antallet af farvelægninger, der er invariante under et givet gruppeelement g.

Fx kan X være de 64 pladser i en 8×8 matrix (et skakbræt) og $F = \{\square, \blacksquare\}$ kan være mængden med to farver. En afbildning $\varphi \colon X \to F$ fortæller hvilke af de to farver, der er lagt på hver af de 64 felter. Gruppen, der virker på skakbrættets felter, kan naturligt være Diedergruppen D_4 af orden 8. Et skakbræt-mønster er herefter en *bane* af ækvivalente farvelægninger, og antallet af baner er antallet af forskellige mønstre på skakbrættet. Antag fx, at g er spejlingen i en given diagonal. En farvelægning invariant under g kan have vilkårlige farver på de 8 felter i diagonalfelter, men hvert af de $(64-8)/2 = 28$ felter over diagonalen skal have samme farve som sit spejlbillede under diagonalen. Der er derfor ialt $2^{8+28} = 2^{36}$ farvelægninger invariante under g.

Kuglerne.

• *Virkning og repræsentation.* Til en virkning af G på X hører en repræsentation: Ligningen,

$$\rho_g(x) = g.x,$$

bestemmer, for hvert $g \in G$, en permutation ρ_g, og det giver en homomorfi $\rho \colon G \to \mathrm{Perm}(X)$. Omvendt, hvis homomorfien ρ er givet, så bestemmer ligningen den tilsvarende virkning.

• *Cayley's Sætning. For et givet g i en given gruppe G er venstre-multiplikation med g, dvs afbildningen $\rho_g : x \mapsto gx$ for $x \in G$, en permutation af G, og $g \mapsto \rho_g$ er en injektiv homomorfi af G ind i* $\mathrm{Perm}(G)$.

• *Baner*. Til en virkning af G på X hører *banerne*, som er delmængder af X af formen,

$$G.x = \{\, g.x \mid g \in G \,\};$$

de udgør en klassedeling svarende til *G-ækvivalens*, defineret ved

$$x' \sim x \iff \exists g \in G : x' = g.x.$$

Mængden af baner er banerummet, betegnet X/G.

• *Fixpunkt*. Ligningen

$$g.x = x$$

fortæller, at x er *fixpunkt* for g og at g *fixerer* x. *Isotropigruppen* G_x består af de $g \in G$ der fixerer x, og X^g er mængden af fixpunkter for g. Med X^G betegnes delmængden af X bestående af de elementer, der er *fixpunkter for virkningen* af G, dvs fixpunkter for alle g.

• *Baneformlen. Længden af en bane, altså elementantallet $|G.x|$, er lig med index af isotropigruppen: $|G.x| = |G{:}G_x|$.*

Hvornår var det nu det var? Arthur Cayley 1821–95.

På sigt: Den niende uge, 31/3-4/4, har overskriften „Ring; ideal og kvotientring“, fra RNG1–2. Måske mangler jeg at nævne lidt mere om Sylow-grupper. Ugens øvelser er GRP5: 25, 27, 28; GRP6: 10*, 11; GRP7: 7, 8, 10, 11*, 12, 15, **16**, 18; GRP8: **3**.

Anders Thorup